

DISTANCIAS EN EL PLANO

Distancia entre dos puntos

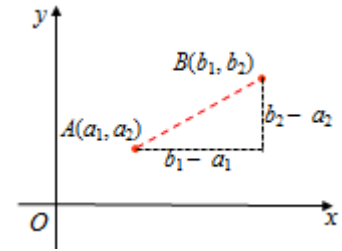
La distancia entre dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ es:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Observaciones:

1) En la figura anterior puede verse que la $d(A, B)$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $b_1 - a_1$ y $b_2 - a_2$.

2) La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que determinan: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$.



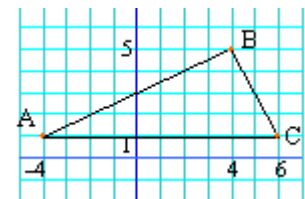
Ejemplo:

Dados los puntos $A(-4, 1)$, $B(4, 5)$ y $C(6, 1)$ se tiene:

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - (-4))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(6 - (-4))^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{100 + 0} = 10$$

$$d(B, C) = \sqrt{(6 - 4)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

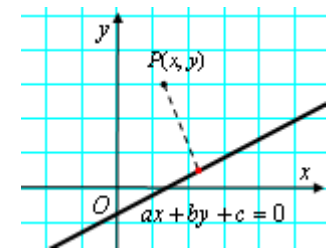


Observación: Puede comprobarse que el triángulo de vértices A , B y C es rectángulo.

Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(x_0, y_0)$ a la recta de ecuación $ax + by + c = 0$ es la menor de las distancias entre el punto P y cualquier punto de la recta; viene dada por el valor de la expresión:

$$d(P(x_0, y_0), r: ax + by + c = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Observaciones:

1) La ecuación de la recta debe escribirse en su forma general.

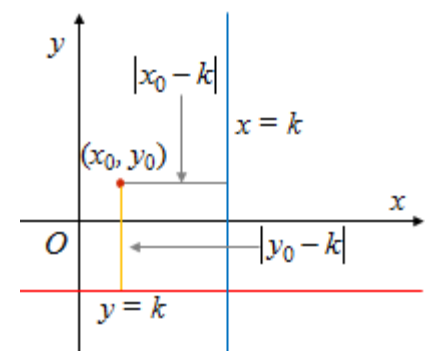
2) Si la recta es horizontal, $y = k$, la distancia del punto

$P(x_0, y_0)$ a ella es la diferencia de ordenadas:

$$d(P(x_0, y_0), r: y = k) = |y_0 - k|$$

3) Si la recta es vertical, $x = k$, la distancia del punto $P(x_0, y_0)$ a ella es la diferencia de abscisas: $d(P(x_0, y_0), r: x = k) = |x_0 - k|$.

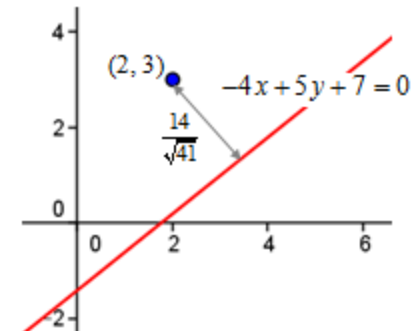
→ Naturalmente, aplicando la fórmula general se obtiene el mismo resultado



Ejemplos:

a) La distancia del punto $P(2, 3)$ a la recta $r: -4x + 5y + 7 = 0$ es

$$d(P, r) = \frac{|-4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{(-4)^2 + 5^2}} = \frac{14}{\sqrt{41}}$$



b) Para determinar la distancia del punto $P(1, -4)$ a la recta $y = -3x + 6$ hay que expresar la recta en su forma general: $3x + y - 6 = 0$, siendo:

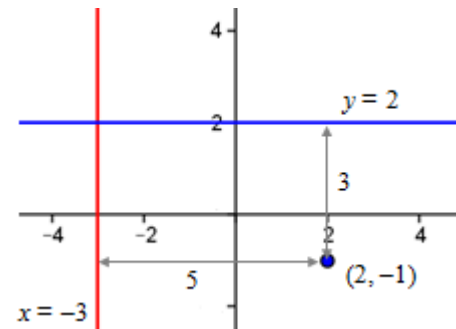
$$d(P(1, -4), r: 3x + y - 6 = 0) = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

c) La distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta $r: x = -3$ es

$$d(P(2, -1), r: x = -3) = |2 - (-3)| = 5$$

d) La distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta $r: y = 2$ es

$$d(P(2, -1), r: y = 2) = |-1 - 2| = 3$$



Pequeños retos

1. Dados los puntos $A(-4, 0)$, $B(1, 2)$ y $C(3, -1)$, halla la distancia entre ellos.

2. Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ a cada una de las siguientes rectas:

a) $r_1: x + 2y - 7 = 0$ b) $r_2: x + 2 = 0$ c) $r_3: -4x - y + 5 = 0$ d) $r_4: y = -1$

Soluciones:

1. $d(A, B) = \sqrt{29}$; $d(A, C) = \sqrt{50}$; $d(B, C) = \sqrt{13}$

2. a) $\frac{11}{\sqrt{5}}$. b) 4. c) 0. d) 2.