

CÓNICAS: LA PARÁBOLA

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano P que equidistan de un punto fijo F , llamado foco, y de una recta fija d , llamada directriz. Esto es, si P es un unto de la parábola se cumple que: $d(P, F) = d(P, d)$

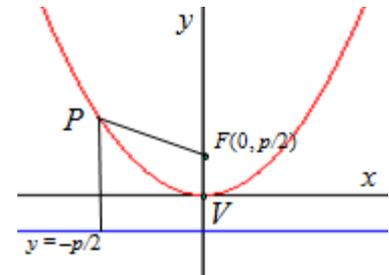
Elementos de la parábola

Eje de la parábola: es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. La parábola es simétrica respecto de su eje.

Vértice: es el punto de corte de la parábola con su eje.

La distancia del vértice al foco se llama distancia focal y se

representa por $\frac{p}{2}$. El número p , distancia del foco a la directriz, es el parámetro de la parábola.



Ecuación de la parábola

- Parábola de eje vertical el eje OY y vértice el origen: $x^2 = 2py$.

Si el vértice está en el punto $V(x_0, y_0)$ y eje paralelo al eje OY , su ecuación es:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

→ Esta ecuación se transforma en la conocida $y = ax^2 + bx + c$. Esta es la ecuación que merece la pena retener; está asociada a la ecuación de segundo grado y a la función cuadrática.

Si la ecuación viene dada en la forma $y = ax^2 + bx + c$, la abscisa de su vértice es $x = -\frac{b}{2a}$, que, precisamente es la ecuación del eje de la parábola. La ordenada del vértice se obtiene sustituyendo.

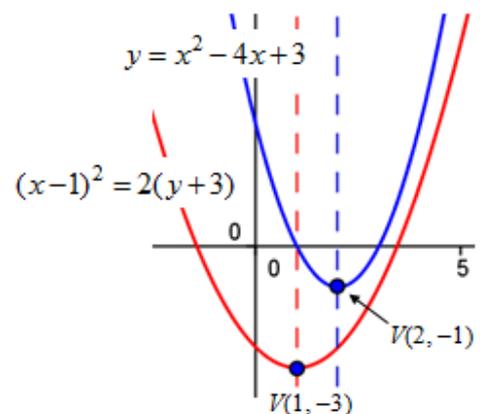
Ejemplos:

- a) La parábola de vértice el punto $V(1, -3)$, de parámetro $p = 1$, y eje paralelo al eje de ordenadas tiene por ecuación

$$(x - 1)^2 = 2(y + 3), \text{ que desarrollada es: } y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}.$$

- b) La parábola de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$ tiene su vértice

cuando $x = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \rightarrow y = -1 \Rightarrow V = (2, -1)$.



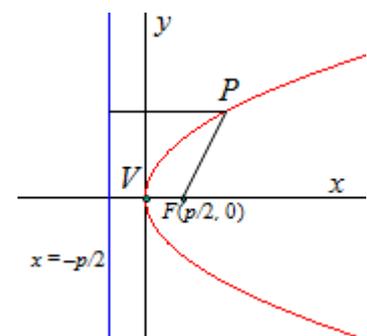
- Parábola de eje horizontal el eje OX , con vértice en $(0, 0)$, foco en

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \text{ y la directriz es la recta } d : x = -\frac{p}{2}.$$

Su ecuación es $y^2 = 2px$.

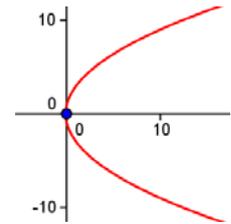
Un caso particular es $y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$.

- Cualquier expresión de la forma $x = my^2 + ny + q$ es una parábola de eje horizontal.



Ejemplo:

La parábola de foco el punto $F(2, 0)$ y directriz la recta $d: x = -2$, tiene por parámetro $p = 4$, luego su ecuación es $y^2 = 2 \cdot 4x \Rightarrow y^2 = 8x$.



Pequeños retos

1. Escribe la ecuación de la parábola de eje vertical, con vértice en $V(-1, 2)$ y $p = 1$. Haz una representación gráfica aproximada.
2. Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4x + 3$, represéntala y halla su vértice.
3. Representa las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$. Comprueba que sus gráficas son idénticas pero giradas 90° .

Soluciones:

1. y 2.

