

CÓNICAS: LA HIPÉRBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la diferencia de sus distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos, F y F' , llamados focos, es constante. Esto es, si P pertenece a la hipérbola: $|d(P, F) - d(P, F')| = \text{constante}$

Elementos de una hipérbola

Eje focal es la recta que pasa por los dos focos.

Eje secundario es la mediatriz del segmento que determinan los focos.

La hipérbola es simétrica respecto de ambos ejes.

Centro es el punto de corte de los dos ejes.

Los vértices de la hipérbola, A y A' , son los puntos de corte de ésta con el eje horizontal.

El segmento AA' se llama eje real; su valor es $2a$. El semieje horizontal es a .

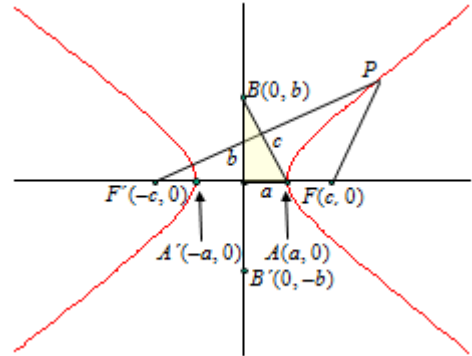
Los puntos de la hipérbola cumplen que:

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a.$$

Al segmento BB' se le llama eje imaginario; su valor es $2b$. El semieje imaginario es b .

La distancia entre los focos se llama distancia focal y vale $2c$.

La relación entre a , b y c es: $c^2 = a^2 + b^2$. Conocidos dos de estos parámetros se puede hallar el tercero.



• La ecuación reducida de la hipérbola (centrada en $(0, 0)$): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

• La ecuación de la hipérbola centrada en el punto $P(x_0, y_0)$ es: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

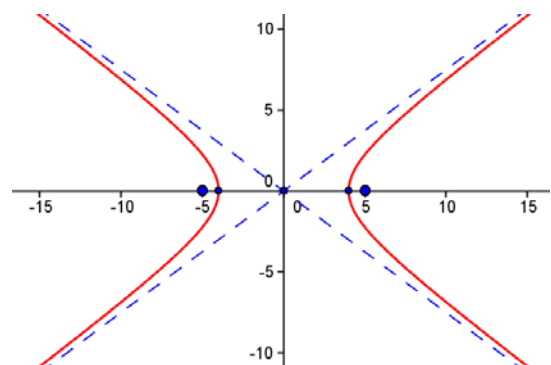
Ejemplo:

La ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ es la de la hipérbola de semiejes $a = 4$ y $b = 3$.

Sus focos están en los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$.

Asíntotas de una hipérbola. Son rectas hacia las que tiende a *pegarse* la curva. Su ecuación es $y = \pm \frac{b}{a}x$.

→ Las asíntotas de la hipérbola del ejemplo son las rectas: $y = \frac{3}{4}x$ e $y = -\frac{3}{4}x$.



Hipérbola equilátera

Tiene los semiejes real e imaginarios iguales, $a = b$. Su ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow$

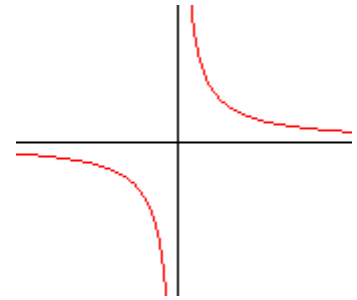
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Sus asíntotas son las rectas $y = \pm x$, es decir son perpendiculares entre sí y coinciden con las bisectrices de los cuadrantes.

Ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas

Su ecuación es $xy = k$.

Sus asíntotas son los ejes cartesianos.



→ La función de proporcionalidad inversa, $y = f(x) = \frac{k}{x}$, es una hipérbola.

Pequeños retos

1. Halla la ecuación de la hipérbola centrada en el origen y de semiejes 3 y 4. ¿En qué puntos estas sus focos? ¿Cuál es la ecuación de sus asíntotas?

2. Representa gráficamente la hipérbola $xy = 4$.

Soluciones:

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Focos: $(-5, 0)$, $(5, 0)$. Asíntotas: $y = \pm \frac{4}{3}x$.

2. Puedes teclear en Google: $y=4/x$, INTRO.