

CÓNICAS: LA ELIPSE

La elipse: es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, F y F' , llamados focos, es constante: $d(P, F) + d(P, F') = \text{constante} = 2a$.

Elementos de una elipse

Eje focal es la recta que pasa por los dos focos.

Eje secundario es la mediatriz del segmento que determinan los focos.

La elipse es simétrica respecto de ambos ejes.

Centro es el punto de corte de los dos ejes.

Los vértices de la elipse A, A', B, B' son los puntos de corte de ésta con los ejes.

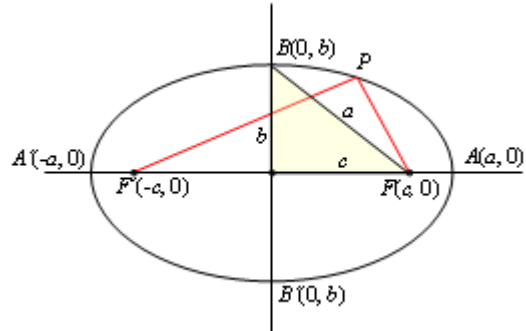
El segmento AA' se llama eje mayor; su valor es $2a$. El semieje mayor es a .

Los puntos de la elipse cumplen que: $d(P, F) + d(P, F') = 2a$

Al segmento BB' se le llama eje menor. Su valor es $2b$. El semieje menor es b .

La distancia entre los focos se llama distancia focal y vale $2c$: la semidistancia focal es c .

La relación entre a, b y c es: $a^2 = b^2 + c^2$. Conocidos dos de estos parámetros se puede hallar el tercero.



• La ecuación reducida de la elipse es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

• La ecuación de la elipse centrada en el punto $P(x_0, y_0)$ es: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, a > b$.

Ejemplos:

a) La elipse centrada en origen, de semiejes $a = 5$ y $b = 3$,

$$\text{es: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

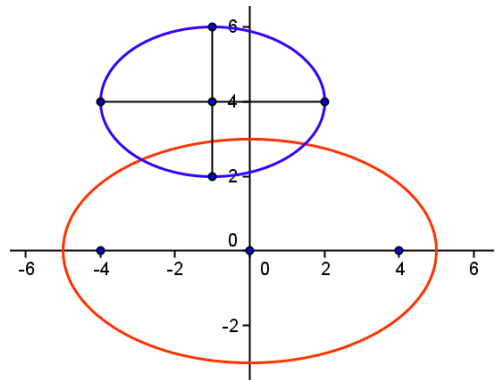
Los ejes de esta elipse miden 10 (horizontal) y 6 (vertical).

Sus focos están en los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$.

b) La elipse centrada en el punto $P(-1, 4)$ y semiejes $a = 3$ y

$$b = 2 \text{ es: } \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1.$$

Sus vértices están en los puntos $(2, 4)$, $(-1, 6)$, $(-4, 4)$ y $(-1, 2)$.



Pequeños retos

Halla la ecuación de la elipse:

a) Centrada en el origen, de semiejes 5 y 4. ¿En qué puntos están sus focos?

b) Centrada en el punto $P(4, 3)$ y semiejes $a = 4$ y $b = 1$. ¿En qué puntos están sus vértices?

Soluciones:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Focos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$. b) $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$. Vértices: $(8, 3)$, $(4, 4)$, $(0, 3)$ y $(4, 2)$.