COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES EN EL ESPACIO: BASES

Dependencia e independencia lineal de vectores. Bases

→ Dependencia lineal

Si $\vec{a}$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n$ son vectores de un espacio vectorial **E**, se dice que el vector $\vec{a}$ es combinación lineal del conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$ cuando se puede escribir en función de ellos; esto es, cuando $\vec{a} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$, donde a_i son números reales. También se dice que $\vec{a}$ depende linealmente de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$.

- Los vectores $\vec{a}$ y $k\vec{a}$ son dependientes uno del otro: tienen la misma dirección; son paralelos; sus coordenadas son proporcionales.
- Al conjunto de vectores que dependen linealmente de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$ se le llama variedad lineal engendrada por ellos. Toda variedad lineal tiene estructura de espacio vectorial. Más en concreto, toda variedad lineal es un susbespacio vectorial del espacio vectorial de referencia.

Ejemplos:

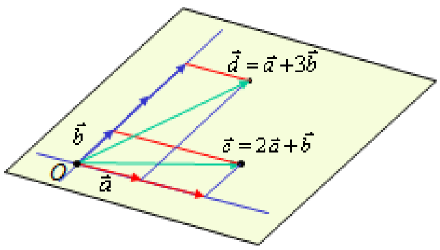
a) Si $\vec{a}$ = (1, −2, 0) y $\vec{b}$ = (3, −1, 4), todos los vectores de la forma $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ son combinación lineal (o dependen linealmente) de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Entre ellos:

$\vec{c} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ = 2(1, −2, 0) − 4(3, −1, 4) = (−10, 0, −16).

b) El conjunto de vectores de la forma $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ es un susbespacio de $\mathbf{R}^3$. Estos vectores también se pueden escribir como $\vec{c} = \lambda(1, -2, 0) + \mu(3, -1, 4) = (\lambda + 3\mu, \quad -2\lambda - \mu, \quad 4\mu)$. Dando valores a λ y μ se obtienen los vectores de ese subespacio. Por ejemplo, para λ = −1 y μ = 2 se obtiene

$\vec{c} = (-1 + 3\cdot 2, \quad -2\cdot(-1) - 2, \quad 4\cdot 2)$ = (5, 0, 8).

(En este caso, los vectores pertenecen todos a un mismo plano, como se verá en el siguiente tema).



c) El vector $\vec{e}$ = (5, 0, 0) no depende linealmente de $\vec{a}$ = (0, −2, 1) y $\vec{b}$ = (0, 2, 1), pues la primera coordenada, 5, no puede obtenerse a partir de dos ceros, que son la primera coordenada de cada uno de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{e}$ son linealmente independientes.

d) Podemos preguntarnos: ¿qué valor debe tomar α para que los vectores $\vec{a}$ = (2, 1, α) y $\vec{b}$ = (4, 2, −2) tengan la misma dirección?

Como debe cumplirse que (2, 1, α) = k · (4, 2, −2) ⇒ $k = \frac{1}{2}$; luego $\alpha = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$.

→ Independencia lineal

Si un vector no puede ponerse como combinación lineal de otros, se dice que es linealmente independiente de ellos.

- En general, un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_n\}$ es linealmente independiente si la igualdad $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$ se cumple sólo cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Si la igualdad anterior se puede cumplir con algún $\lambda_i \neq 0$, los vectores son linealmente dependientes.

- El vector $\vec{0}$ de $\mathbf{R}^3$ es $\vec{0}$ = (0, 0, 0). Este vector depende linealmente de cualquier conjunto de vectores, pues $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + ... + 0 \cdot \vec{v}_n$.

Ejemplos:

a) El conjunto de vectores {(1, 0, 1), (1, 3, 2), (0, −1, 1)} es linealmente independiente, pues la igualdad $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 3, 2) + \lambda_3(0, -1, 1) = (0, 0, 0)$ solo se cumple si $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$.
En efecto: $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(1, 3, 2) + \lambda_3(0, -1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$
Igualando las componentes se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{E3-E1} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow_{E3+E2} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

b) Los vectores del plano $\vec{a}$ = (1, −2) y $\vec{b}$ = (−2, 4) son linealmente dependientes, pues $\vec{b} = -2\vec{a}$ y, por tanto: $2\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

c) El conjunto de vectores {(1, 0, 1), (0, 1, 2), (1, −1, −1)} es linealmente dependiente, pues la relación $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, -1) = (0, 0, 0)$ se cumple sin necesidad de que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$.
En efecto: $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, -1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases},$$

que es un sistema con infinitas soluciones; por ejemplo: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -1$.
Puede verse también que (1, 0, 1) = (0, 1, 2) + (1, −1, −1).

→ <u>Criterio para determinar la dependencia o independencia lineal</u> de tres vectores del espacio.
Aparte del método aplicado más arriba (el planteamiento y resolución de un sistema lineal), para comprobar si tres vectores del espacio son linealmente independientes, basta con resolver el determinante formado por los tres vectores. Si ese determinante vale cero, los vectores son linealmente dependientes; en caso contrario, serán linealmente independientes.

Ejemplos:

a) Los vectores (1, 0, 1), (1, 3, 2) y (0, −1, 1) son linealmente independientes, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 \neq 0 \rightarrow \text{Este conjunto de vectores tiene rango 3.}$$

b) Los vectores (1, 0, 1), (0, 1, 2) y (1, −1, −1) son linealmente dependientes, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \rightarrow \text{Este conjunto de vectores tiene rango 2.}$$

<u>Observación:</u> Este mismo método puede aplicarse para vectores de dimensión dos, de dimensión 4, o de cualquier dimensión.

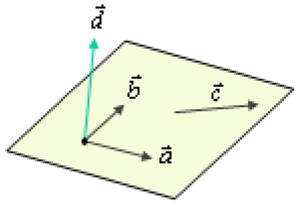
→ Interpretación geométrica de la dependencia lineal de vectores

– En el plano: dos vectores son linealmente dependientes cuando son paralelos; en caso contrario, serán linealmente independientes.

(Dados tres vectores del plano, siempre habrá uno que dependa de los otros dos.)

– En el espacio: dos vectores son linealmente dependientes cuando son paralelos; tres vectores son linealmente dependientes cuando están en el mismo plano (si son coplanarios). Tres vectores son linealmente independientes si están en planos distintos.

(Dados cuatro vectores del espacio, siempre habrá uno que dependa de los otros tres.)



Base de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial, **E**, es un conjunto de vectores, $\mathbf{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,....\vec{v}_n\}$, todos de **E**, que cumple dos condiciones:

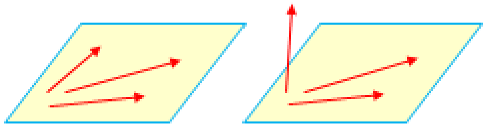
1) $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,....\vec{v}_n\}$ son linealmente independientes; esto es, ninguno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás.

2) Cualquier vector de **E** depende linealmente del conjunto $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,....\vec{v}_n\}$.

Bases de R^3

Tres vectores que sean linealmente independientes (no nulos, no paralelos y no coplanarios) forman una base de $\mathbf{R}^3$. (Pueden darse infinitas bases para $\mathbf{R}^3$).

Si $\mathbf{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbf{R}^3$, y $\vec{a}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3$, a los números a_1, a_2 y a_3 se les llama coordenadas de $\vec{a}$ respecto de $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$.



Como se ha dicho anteriormente, para comprobar que tres vectores constituyen una base de $\mathbf{R}^3$ basta con calcular el determinante asociado y ver que es distinto de 0.

Ejemplo:

a) Los vectores (1, 0, 1), (0, 0, 2), (0, –1, 1), forman una base de $\mathbf{R}^3$, pues $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$.

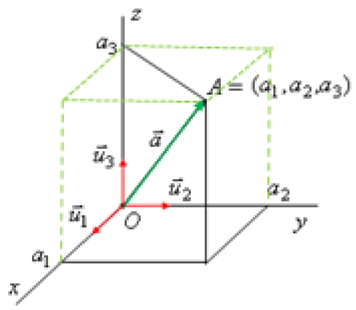
El vector $\vec{v}=\lambda_1(1, 0, 1)+\lambda_2(0, 0, 2)+\lambda_3(0, -1, 1)$ tiene coordenadas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ respecto de esa base. Esta base no es operativa, pues el vector que tiene, respecto de ella, las coordenadas (3, –1, 5) es $\vec{v}=3(1, 0, 1)-1(0, 0, 2)+5(0, -1, 1)=(3, -5, 6)$; pero decir que las coordenadas del vector (3, –5, 6) son (3, –1, 5) no es fácil de entender.

b) Para ver que los vectores $\vec{v}_1=(2, 1, k)$, $\vec{v}_2=(1, -2, 3)$ y $\vec{v}_3=(-k, -1, 0)$ constituyan una base de $\mathbf{R}^3$ hay que exigir que el determinante $\begin{vmatrix}2 & 1 & k\\ 1 & -2 & 3\\ -k & -1 & 0\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow -2k^2-4k+6\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k\neq 1$ y $k\neq -3$. Luego, los vectores dados forman una base siempre que $k\neq 1$ y -3.

- La base canónica, la usual, de $\mathbf{R}^3$ es $\mathbf{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}. Esta base es la que se utiliza por defecto; tiene la ventaja de que las coordenadas de un vector se obtienen directamente. Así, las coordenadas del vector $\vec{v}$ = (3, −1, 5) son 3, −1 y 5, pues:
  $\vec{v}$ = 3(1, 0, 0) −1(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1) = (3, –1, 5).

La referencia usual en R^3 es $\{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, siendo O el origen de coordenadas y $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ los vectores de la base canónica. Así, al punto $A(a_1, a_2, a_3)$ se le asocia el vector $\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$; o bien: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.



Su representación gráfica se indica en la figura adjunta.
Los ejes de coordenadas suelen denotarse con las letras *x*, *y*, *z*; también suele hablarse de eje *OX*, eje *OY* y eje *OZ*.
Para el punto *A* dado, se tiene: $x = a_1$, $y = a_2$ y $z = a_3$.

→ Pueden ampliarse estos conceptos pinchando AQUÏ.

Pequeños retos

1. Dados los puntos A(1, 2, 0), B(–1, 1, 1), C(0, 0, 1) y D(4, 1, 3). Determina si los vectores ***AB***, ***AC*** y ***AD*** son linealmente dependientes.
2. Comprueba que los puntos A(0, 5, 3), B(0, 6, 4), C(2, 4, 2) y D(2, 3, 1) son coplanarios, que están en el mismo plano.

Soluciones:
1. ***AB*** = (–2, –1, 1); ***AC*** = (–1, –2, 1); ***AD*** = (3, –1, 3). Son linealmente independientes, lo que significa que los cuatro puntos no son coplanarios (que no están en el mismo plano).
2. Determinan los vectores ***AB*** = (0, 1, 1), ***AC*** = (2, –1, –1) y ***AD*** = (2, –2, –2) que son linealmente dependientes.