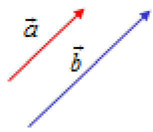
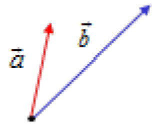
COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES EN EL PLANO: BASES



- Dos vectores son <u>linealmente dependientes</u> si tienen la misma dirección. Las coordenadas de dos vectores linealmente dependientes son proporcionales.

Los vectores $\vec{a}$ = (–1, 3) y $\vec{b}$ = (2, –6) son linealmente dependientes pues $\vec{b} = -2\vec{a}$.



- Dos vectores son <u>linealmente independientes</u> si tienen distinta dirección: sus coordenadas no son proporcionales.

Los vectores $\vec{a}$ = (1, 3) y $\vec{b}$ = (4, 4) son linealmente independientes, pues tienen distinta dirección. Esto significa que es imposible escribir $\vec{b}$ en función de $\vec{a}$.

Combinación lineal de vectores

- Un vector $\vec{c}$ <u>depende linealmente</u> de otros dos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuando puede escribirse en función de ellos. Esto es, cuando $\vec{c} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b}$, siendo *x* e *y* números reales, que se llaman <u>componentes</u> de $\vec{c}$ respecto de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. También se dice que el vector $\vec{c}$ es <u>combinación lineal</u> de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
- Todos los vectores que se obtienen a partir de sumas o restas de otros vectores dados dependen linealmente de ellos.

Ejemplos:

Si $\vec{a}$ = (1, 3) y $\vec{b}$ = (4, 4), los vectores que se dan a continuación dependen linealmente de $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

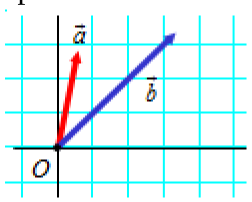
$\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ = (1, 3) + (4, 4) = (5, 7); $\vec{c}_2 = \vec{a} - \vec{b}$ = (1, 3) – (4, 4) = (–3, –1);

$\vec{c}_3 = \vec{a} + 2\vec{b}$ = (1, 3) + (8, 8) = (9, 11); $\vec{c}_4 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ = (3, 9) – (8, 8) = (–5, 1)

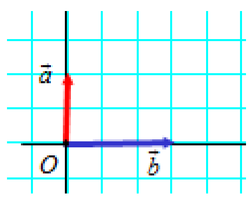
$\vec{c}_5 = -3\vec{a}$ = (–3, –9) → (observa que no es necesario que intervengan los dos vectores).

Base de R^2 (del plano)

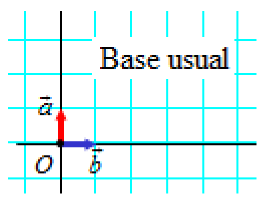
En el plano, dos vectores no nulos y linealmente independientes (no paralelos) forman una <u>base</u>.
En el plano pueden utilizarse infinitas bases.
Los vectores representados a continuación serían bases del plano.



Base



Base ortogonal



Base ortonormal

La <u>base usual (canónica)</u> está determinada por dos vectores de modulo 1, perpendiculares y con origen común en *O*. Es: $B = \{\vec{u}_1 = (1,0),\ \vec{u}_2 = (0,1)\}$.
Trabajar con la base canónica es lo normal, por ser lo más cómodo y sencillo.

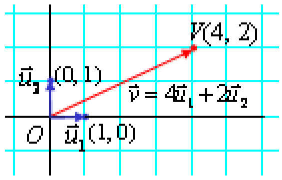
Ejemplos:

a) Los vectores $\vec{a}$ = (1, 3) y $\vec{b}$ = (5, –1) son linealmente independientes; por tanto, determinan una base en el plano.

b) El vector $\vec{c}$ = (–3, 7) depende linealmente de $\vec{a}$ = (1, 3) y $\vec{b}$ = (5, –1), pues $\vec{c}$ = 2$\vec{a}$ – $\vec{b}$, ya que (–3, 7) = 2 · (1, 3) – 1 · (5, –1). Las componentes de $\vec{c}$ respecto de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son 2 y –1.

c) El vector $\vec{c}$ = (–3, 7) depende linealmente de los vectores $\{\vec{u}_1 = (1, 0),\ \vec{u}_2 = (0,1)\}$, pues $\vec{c} = -3\vec{u}_1 + 7\vec{u}_2$, ya que (–3, 7) = –3 · (1, 0) + 7 · (0, 1).
→ Las componentes de $\vec{c}$ = (–3, 7) respecto de $\{\vec{u}_1 = (1, 0),\ \vec{u}_2 = (0,1)\}$ son –3 y 7, precisamente las coordenadas del punto (–3, 7).

Observaciones:
1) La noción de base requiere previamente la de espacio vectorial. Una base está formada por el mínimo número de vectores capaces de generar a todos los demás. Ese número indica la dimensión de ese espacio vectorial.
En el plano, en $\mathbf{R}^2$, una base contiene dos vectores. La dimensión del plano es 2: ancho y largo. (En el espacio usual, en $\mathbf{R}^3$, una base contiene tres vectores. La dimensión del espacio es 3: ancho, largo y alto.)
2) Si no se advierte nada se trabajará en la base canónica. Esto simplifica las cosas, lo que permite escribir, por ejemplo, $\vec{c}$ = (–3, 7) en vez de $\vec{c} = -3\vec{u}_1 + 7\vec{u}_2$; o $\vec{v}$ = (4, 2) en lugar de $\vec{v} = 4\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.



3) Cuando se trabaja con otra base, para interpretar los resultados puede ser necesario recurrir al cambio de base.
El paso de una base cualquiera a la base canónica es fácil: basta con sustituir. Así, el vector $\vec{c} = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ dado en la base $B' = \{\vec{v}_1 = (1, 3),\ \vec{v}_2 = (5, -1)\}$, se expresa en la base canónica como sigue: $\vec{c} = -(1,3) + 3(5,-1) = -(1,3) + (15,-3) = (14,-6)$.
El paso de la base canónica a otra base cualquiera es algo más complicado: hay que resolver un sistema. Por ejemplo, para expresar el vector $\vec{c} = 2\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$ = (2, –5) en función de la base B', se hace lo siguiente:

- Supuesto que $\vec{c} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 = x(1,3) + y(5,-1) = (x+5y, 3x-y)$,
- Debe cumplirse que $(x+5y, 3x-y) = (2,-5) \Rightarrow \begin{cases} x+5y=2 \\ 3x-y=-5 \end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{23}{16},\ y = \dfrac{11}{16}$.

Por tanto $\vec{c} = -\dfrac{23}{16}\vec{v}_1 + \dfrac{11}{16}y\vec{v}_2$.

Pequeños retos

1. Dados los vectores $\vec{a}$ = (1, 3) y $\vec{b}$ = (4, 4), comprueba que no existe ningún número real *k* que cumpla que $\vec{a} = k\cdot\vec{b}$.
Nota: Esto significa que ambos vectores son linealmente independientes.

2. Comprueba que el vector $\vec{c} = (-1,\ 5)$ se puede poner como combinación lineal de $\vec{a}$ = (1, 3) y $\vec{b}$ = (4, 4).

3. Para la base canónica *B* y la base $B' = \{\vec{v}_1 = (1, 3),\ \vec{v}_2 = (5, -1)\}$, realiza los cambios de base que se indican:
a) Expresa en función de *B* el vector $\vec{v} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
b) Expresa en función de *B´* el vector $\vec{v} = 8\vec{u}_1 - 8\vec{u}_2$.

Soluciones:
2. $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$.
3. a) Coordenadas: (–3, 7). b) Componentes: (–2, 2).