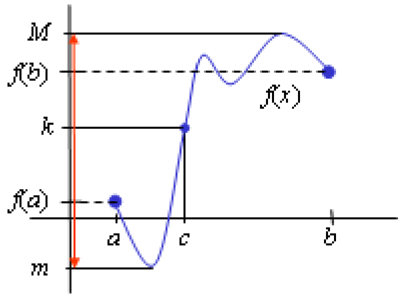
TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS (DARBOUX)

El **teorema de los valores intermedios (Darboux)** (Francés, 1842/1917), dice:
Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces la función toma cada valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.
Esto es, para cualquier número k comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, $f(a) < k < f(b)$, existe un $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = k$.

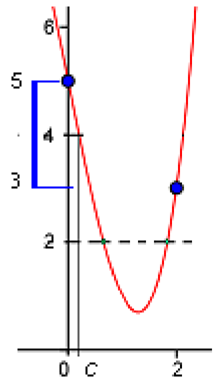
Es una consecuencia del teorema de Bolzano. Su demostración es sencilla, pues basta con definir otra función, $g(x) = f(x) - k$, y aplicarle el teorema de Bolzano.
En efecto:
La función $g(x) = f(x) - k$ es continua en $[a, b]$, por ser diferencia de dos funciones continuas en $[a, b]$.
Además, $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$, pues $g(a) = k - f(a) > 0$ y $g(b) = k - f(b) < 0$.



Luego, $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. En consecuencia, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$. Pero esto significa que $g(c) = k - f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = k$.

Ejemplos:
a) La función $f(x) = \sqrt{x+1}$, es continua en el intervalo [0, 3]; además, en sus extremos toma los valores $f(0) = 1$ y $f(3) = 2$. Por tanto, la función toma todos los valores entre 1 y 2; por ejemplo, el valor $1{,}83$. (Ese valor lo toma en la solución de la ecuación $1{,}83 = \sqrt{x+1}$, que es $x = 1{,}83^2 - 1 = 2{,}3489$. Es evidente que $2{,}3489 \in [0, 3]$).

b) Dada $f(x) = x^3 - 5x + 5$. ¿Puede afirmarse que esa función toma el valor 4 en algún punto del intervalo [0, 2]? ¿Y el valor 2?
→ Como la función es continua y en los extremos del intervalo toma los valores $f(0) = 5$ y $f(2) = 3$, se deduce que toma todos los valores entre 3 y 5; en particular el valor 4. Esto es, existirá algún punto $c \in (0, 2)$ tal que $f(2) = 4$. (Véase la figura adjunta).
Como 2 no está entre 3 y 5, no puede afirmarse que la función tome ese valor para algún punto del intervalo (0, 2); pero tampoco puede afirmarse que no lo tome. (De hecho hay dos valores que toman el valor 2).



Observaciones:
1) Este resultado puede ampliarse un poco más, afirmando que "Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces la función toma cada valor comprendido entre el mínimo (m) y el máximo (M) de $f(x)$ en ese intervalo". Esto es, para cualquier número k comprendido entre m y M, $m < k < M$, existe un $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = k$.
2) Desde el punto de vista algebraico, que $f(c) = k$ significa que c es la solución de la ecuación $f(x) = k$. Cuando esa ecuación se puede resolver, el valor de c se encuentra de manera inmediata; cuando no se puede hacer, el teorema afirma que existe solución, aunque no se pueda determinar.

→→

Ejemplos:
a) La función $f(x)=\sqrt{x+1}$, que está definida para $x \geq -1$, toma valores desde 0, que es el mínimo, hasta infinito. Es fácil ver que $f(x)=\sqrt{x+1}$ toma cada vez valores más grandes, siendo su mínimo $f(-1)=0$. Para saber en qué punto tomará el valor 5, por ejemplo, basta con resolver la ecuación $\sqrt{x+1}=5 \Rightarrow x = 24$.

b) La función $f(x)=e^x+x^2-3x-2$, definida en todo **R**, puede estudiarse en el intervalo [0, 3].
→ Como $f(0)=-1$ y $f(3)=e^3+3^2-3\cdot 3-2\approx 18,08$ ⇒ la función toma todos los valores entre –1 y 18,08. Así, con seguridad existe un valor *c* tal que $f(c)=7$, y otro valor *c´* tal que $f(c')=0$, pues tanto 7 como 0 están entre –1 y 18,08.
No obstante, ninguna de las ecuaciones, $e^x+x^2-3x-2=7$ y $e^x+x^2-3x-2=0$, puede hacerse.

→ La función dada toma valores menores que –1, pero eso el teorema de los valores intermedios no lo detecta. Por ejemplo, $f(0,5)=e^{0,5}+0,5^2-3\cdot 0,5-2\approx -1,6$.
→ Para hallar cuál es el valor mínimo que toma la función $f(x)=e^x+x^2-3x-2$ se requiere el uso de derivadas; y, como el lector sabrá, se obtiene resolviendo la ecuación $f'(x)=e^x+2x-3=0$, que tampoco se puede hacer.