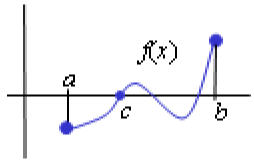
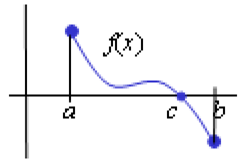
TEOREMA DE BOLZANO

El **teorema de Bolzano** (Checo, 1781/1848), asegura que si una función continua en un intervalo cerrado toma signos distintos en sus extremos, entonces corta al eje *OX* en algún punto de ese intervalo.
Dice así: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

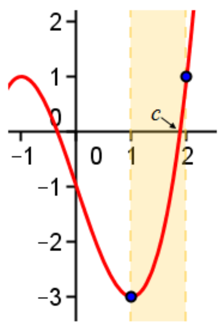


Esto es, si la función es negativa en *a* ($f(a) < 0$) y positiva en *b* ($f(b) > 0$), entonces se anula en algún punto *c* entre *a* y *b* ($f(c) = 0$).
Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje *OX* en un punto, al menos.



→ Lo mismo sucede si la función es positiva en *a* y negativa en *b*.
→ Que corte una vez al eje no implica que solamente corte una vez, Puede cortar más veces, como en la primera figura. Tampoco excluye que corte más veces en otros intervalos.
Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

Ejemplos:
a) La función $f(x) = x^3 - 3x - 1$ es continua en todo **R**, y en particular en el intervalo [1, 2].



Como $f(1) = 1 - 3 - 1 = -3 < 0$ y $f(2) = 8 - 6 - 1 = 1 > 0$, puede asegurase que la función toma el valor 0 para algún número comprendido entre 1 y 2. Esto es, existe un número *c*, mayor que 1 y menor que 2, tal que $f(c) = 0$. Ese número *c* será una solución de la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$, pues cumple que $c^3 - 3c - 1 = 0$.
(Otra cosa es encontrar el valor exacto de esa solución, ya que salvo en casos concretos no podrá obtenerse; aunque puede aproximarse tanto como se desee).
→ Esta función corta también al eje *OX* en algún punto del intervalo [–1, 1], como puede observarse en la gráfica. (También puede comprobarse que se cumplen las hipótesis del teorema en ese intervalo).

b) La función $f(x) = x - \cos x$ corta al eje *OX* en el intervalo [0, 1] pues:
1) es continua en todo **R**, y en particular en el intervalo dado;
2) $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$ y $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$, pues cos 1 < 1.
Luego la función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano y, por tanto, existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. En ese punto la función $f(x) = x - \cos x$ corta al eje *OX*.

Ejercicio 1. (Propuesto en Selectividad, Castilla León 2013)
Prueba que la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ tiene exactamente tres soluciones reales.
Solución:
Se considera la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$, que es continua en todo **R**.
Para probar que la ecuación dada tiene tres raíces hay que encontrar tres intervalos, disjuntos, en los que la función tome signos distintos en sus extremos. (Que las raíces sean exactamente tres, y no

más, es una consecuencia del teorema fundamental del álgebra, que afirma que toda ecuación polinómica tiene tantas raíces, reales o complejas, como indica su grado).
Para encontrar los intervalos hay que calcular los valores de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ en distintos puntos. Por ejemplo:
1) En $x = -3$, $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 3 = -3 < 0$; en $x = -2$, $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 3 = 1 > 0$.
2) En $x = -1$, $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 3 = -1 < 0$; en $x = 0$, $f(0) = -3 < 0$.
3) Para $x = 1$, $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 3 = 1 > 0$.
Por tanto:
1) Como la función toma distinto signo en los extremos del intervalo [–3, –2] ⇒ corta al eje *OX* en algún punto del intervalo (–3, –2) ⇔ la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ tiene una solución entre –3 y –2.
2) Igualmente, la función toma distinto signo en los extremos del intervalo [–2, –1] ⇒ la ecuación dada tiene otra solución entre –2 y –1.
3) Por último, como la función toma distinto signo en los extremos del intervalo [0, 1] ⇒ la ecuación dada tiene una tercera solución entre 0 y 1.

Ejercicio 2. (Propuesto en Selectividad, Extremadura 2013)
a) Demuestra que alguna de las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ es negativa.
b) Demuestra que $P(x)$ tiene también alguna raíz positiva.
Solución:
a) La función $P(x) = x^4 - 8x - 1$ es continua en todo **R**.
Además: $P(-1) = 1 + 8 - 1 = 8 > 0$ y $P(0) = -1 < 0$.
Por tanto, por Bolzano, la función $P(x) = x^4 - 8x - 1$ corta al eje entre –1 y 0 (que es un número negativo). Esto es, el polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ tiene una raíz negativa.

b) Como $P(0) = -1 < 0$ y $P(3) = 81 - 24 - 1 > 0$, el polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ tiene una raíz positiva, ente 0 y 3.
(Pueden darse más soluciones, ya que: $P(2) = -1 < 0$ y $P(3) > 0$ ⇒ entre 2 y 3 existe una raíz).

Pequeños retos
1. Comprueba que las siguientes funciones cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano en los intervalos que se indica:
a) $f(x) = e^x - 3x$, en [0, 1]; y en [1, 2] b) $f(x) = x - \ln(x+2)$, en [0, 2]

2. Halla dos intervalos disjuntos en los que la función $h(x) = x^4 - 2x^3 - 1$ corte al eje *OX*.

3. ¿Puede asegurarse que la curva de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$ corta al eje *OX* en algún punto del intervalo [3, 5]?

Soluciones:
1. Es evidente que son funciones continuas en los intervalos dados.
a) Puede verse que $f(0) = e^0 = 1 > 0$, $f(1) = e - 3 < 0$ y $f(2) = e^2 - 6 > 0$.
b) $f(0) = -\ln 2 < 0$ y $f(2) = 2 - \ln 4 > 0$.
2. Por ejemplo: [–1, 0]; [2, 3].
3. No, pues no cumple el teorema de Bolzano en ese intervalo: es discontinua en $x = 4$.