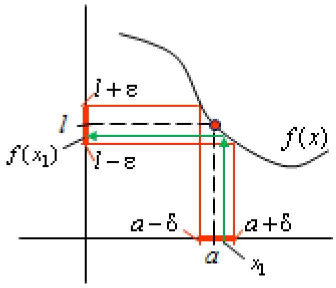
DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Si una función *f* está definida para todos los valores de *x* próximos a *a*, aunque no necesariamente en el mismo *a*, entonces, se dice que el límite de $f(x)$ vale *l*, cuando *x* tiende a *a*, si el valor de $f(x)$ se aproxima a *l* cuando *x* se aproxima a *a*.
Se escribe así: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. (También $f(x) \to l$, cuando $x \to a$).
Si una función $f(x)$ no tiende a ningún número concreto cuando *x* tiende a *a*, se dice que no tiene límite cuando *x* tiende a *a*.
(Pueden verse ejemplos pinchando AQUÍ).

Definición de límite de una función en un punto
Existirá el límite de $f(x)$, cuando $x \to a$, y su valor será *l*, si para cualquier entorno de *l*, $E_\varepsilon(l)$, puede encontrarse otro entorno de *a*, $E_\delta(a)$, de manera que todos los valores de $x \in E_\delta(a)$ se transformen, mediante $f(x)$, en puntos de $E_\varepsilon(l)$.
O con símbolos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \;|\; \forall\, x, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$



Esta expresión se lee así: "límite de $f(x)$ cuando *x* tiende a *a* es igual a *l*", equivale a decir que "para todo número épsilon mayor que cero, existe un número delta, también mayor que 0, tal que para todo *x* que cumpla que su diferencia con *a*, en valor absoluto, sea mayor que 0 y menor que delta, se cumple que la diferencia entre $f(x)$ y *l*, también en valor absoluto, es menor que el número épsilon elegido".
La condición, $0 < |x-a|$, indica que *x* no toma el valor *a*, pues en tal caso $x - a = 0$.
La condición, $|x-a| < \delta$, indica que $x \in E_\delta(a)$. Esto es: $a - \delta < x < a + \delta$.
La conclusión, $|f(x) - l| < \varepsilon$, significa que $f(x) \in E_\varepsilon(l)$. Esto es: $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

Ejercicio:
Demuestra, aplicando la definición, que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3) = 1$.
Solución:
Hay que ver que para cualquier ε > 0, existe δ > 0 tal que si $|x-2| < \delta$, entonces $|(x^2-3)-1| < \varepsilon$.
Como $|(x^2-3)-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon \Rightarrow$ (transformando la desigualdad) $\Rightarrow$
$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon \Rightarrow \sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$.
Por tanto, tomando δ < mínimo de $\{2 - \sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon} - 2\}$ se cumple que $|(x^2-3)-1| < \varepsilon$. Luego, efectivamente, el límite vale 1.
Por ejemplo, si se toma ε = 0,1, el valor de δ puede ser cualquier número menor que 0,02485, pues δ < mínimo de $\{2 - \sqrt{4-0,1}, \sqrt{4+0,1} - 2\}$ = mín{0,02516, 0,02485). Si se elige δ = 0,2 se tendrá que para todo *x* tal que $|x-2| < 0,02 \Leftrightarrow$ 1,98 < *x* < 2,02, se cumple que $|(x^2-3)-1| < 0,1$.
→ Si se toma ε = 0,01, el valor de δ puede ser cualquier número menor que 0,00249, pues δ < mínimo de $\{2 - \sqrt{4-0,01}, \sqrt{4+0,01} - 2\}$ = mín{0,00250, 0,00249); por ejemplo, δ = 0,02.

Límites laterales

En la definición de límite no se distingue entre las posibilidades $x < a$ o $x > a$, pues al escribir $0 < |x - a| < \delta$ resulta indiferente: lo único que se pide es que x este próximo a a.

No obstante, algunas veces conviene distinguir si $x \to a$ por la izquierda (siendo $x < a$), que se escribe $x \to a^-$; o si $x \to a$ por la derecha (siendo $x > a$), denotado por $x \to a^+$.

Esta distinción da lugar al estudio de los límites laterales.

- A $\displaystyle \lim_{x \to a^-} f(x)$ se le llama límite lateral por la izquierda.
- A $\displaystyle \lim_{x \to a^+} f(x)$ se le llama límite lateral por la derecha.

Observación:

Este estudio tiene interés cuando:

1) La función está definida a trozos y se quiere calcular el límite en alguno de los puntos de unión de los diferentes trozos.

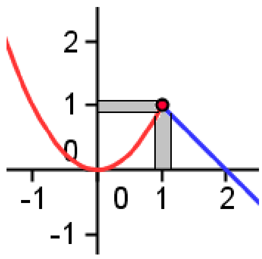
2) La función tiene asíntotas verticales y se quiere determinar la posición de la curva respecto a ellas.

Pues bien, para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los limites laterales y que sean iguales. Esto es, para que exista $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = l$ es necesario que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l .$$

Ejemplos:

a) Para estudiar el límite de la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1 \\ 2 - x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en el punto x = 1 es necesario considerar los límites laterales.

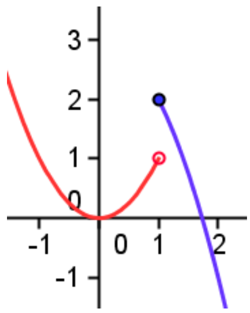


Por la izquierda: $\displaystyle \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

Por la derecha: $\displaystyle \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = 1$

Como ambos límites coinciden, existe el límite y vale 1.

b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ no tiene límite en el punto x = 1, pues:



Por la izquierda: $\displaystyle \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$.

Por la derecha: $\displaystyle \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x^2 + 3) = 2$

Como ambos límites no valen lo mismo, la función dada no tiene límite en ese punto.