

FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Son funciones que se definen de distinta manera, dependiendo del tramo (intervalo de su dominio) en el que actúa; pueden venir determinadas mediante dos o más expresiones algebraicas. La manera de darlas suele ser:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \leq a \\ f_2(x), & \text{si } x > a \end{cases}$$

Se indica así que la función que actúa para los valores de $x \leq a$ es $f_1(x)$, y para los valores de $x > a$ es $f_2(x)$.

Ejemplo:

La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, asocia a los números menores o

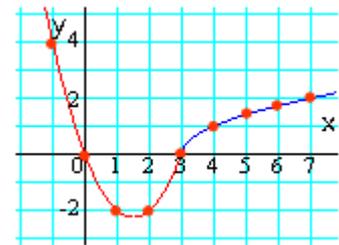
iguales que 3, el valor $x^2 - 3x$; y a los mayores que 3, el resultado de $\sqrt{x-3}$.

Algunos pares de valores son:

Para $x \leq 3$: $(-2, 10)$, $(-1, 4)$, $(0, 0)$, $(1, -2)$, $(2, -2)$, $(3, 0)$,...

Para $x > 3$: $(4, 1)$, $(5, \sqrt{2})$, $(6, \sqrt{3})$, $(7, 2)$,...

Su gráfica sería la adjunta.



→ Hay muchas situaciones cotidianas que están reguladas por tramos. Por ejemplo:

- El coste de facturación de algunas compañías eléctricas depende de la hora del día. Es frecuente que el precio por Kw/h sea más barato en las horas nocturnas.
- La tributación a la Hacienda Pública suele cuantificarse por tramos, en función de los ingresos percibidos. El porcentaje de impuesto es menor para los que menos ganan y mayor para los que más ganan: tiene carácter progresivo.

→ En estas funciones tiene especial importancia determinar la continuidad y derivabilidad en los puntos de unión de los diferentes tramos. Pueden verse los problemas 6 a 16 de [Tema 08](#).

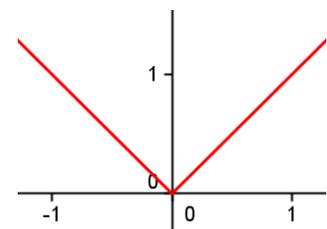
Algunas funciones usuales que se definen a trozos

1) Función valor absoluto

Al aplicar el valor absoluto a una función se obtiene otra función definida a trozos. El caso más sencillo es $f(x) = |x|$.

Su significado es: $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Su gráfica es la adjunta.



La función $|f(x)|$ cambia de signo todos los resultados negativos de $f(x)$; los resultados positivos los deja iguales. Su gráfica no puede aparecer por debajo del eje OX .

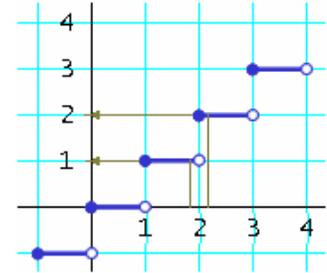
Se define a trozos así: $|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$.

Para determinar los intervalos en los que debe cambiarse de signo hay que resolver la ecuación $f(x) = 0$. Las soluciones de esa ecuación determinan intervalos disjuntos en los que la función toma el

mismo signo en cada uno de ellos, siempre positivo o siempre negativo; en este último caso es cuando se cambia $f(x)$ por $-f(x)$. (Ver también “[valor absoluto de una función](#)” en esta misma página web.

2) Función parte entera

La parte entera de x , $f(x) = ENT[x]$, se define como el número entero inmediatamente menor o igual a x . Así: $ENT[1,8] = 1$; $ENT[1,9] = 1$; $ENT[2] = 2$; $ENT[2,1] = 2 \dots ENT[-0,41] = -1 \dots$

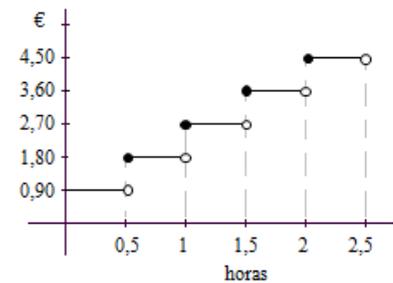


Es un clásico ejemplo de función escalonada.

Ejemplo:

La función que da el coste de un parking dependiendo del tiempo de permanencia de un coche suele ser del tipo parte entera. Si el coste fuese de 0,90 € por cada media hora o fracción de media hora, la función que da el coste total será $f(x) = 0,90 \cdot ENT[1 + 2x]$, donde x indica el tiempo en horas.

Esta función es discontinua, da un salto, al cumplirse cada media hora: en $x = 0,5; 1; 1,5 \dots$



Pequeños retos

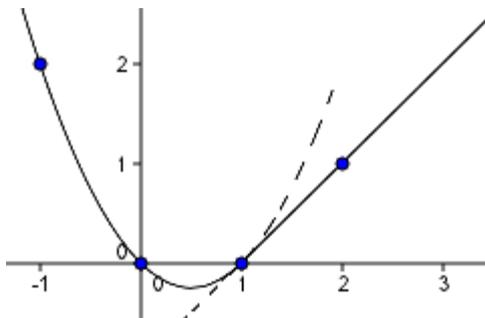
1. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{si } x < 1 \\ x - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

2. Expresa como una función definida a trozos la función $f(x) = |2x - 4|$.

3. Comprueba que la función que da el coste del parking está bien definida por la fórmula dada en el ejemplo anterior: haz pruebas para 45, 80, 110, 151 minutos. ¿Cómo se definiría la función que da el coste del parking cuya tarifa es 0,20 € por cada 5 minutos o fracción?

Soluciones:

1.



2. $f(x) = |2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4, & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(Su gráficas pueden obtenerse tecleando en Google `abs(2x-4)`)

3. $f(x) = 0,20 \cdot ENT[1 + 12x]$, donde x indica el tiempo en horas.

También: $f(m) = 0,20 \cdot ENT\left[1 + \frac{m}{5}\right]$, donde m indica el tiempo en minutos.