FUNCIONES RACIONALES

Las funciones racionales son de la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Dominio:
Estas funciones están definidas para todo valor de x que no anule el denominador: $Q(x)\neq 0$.
Por tanto, su dominio es $\mathbf{R}-\left\{x\in\mathbf{R}\middle|Q(x)=0\right\}$.

Ejemplos:
a) El dominio de $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$ es **R** – {0, 2}; su denominador se anula para $x = 0$ y $x = 2$.
b) La función $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x^2+1}$ está definida para todo **R**; su denominador no se anula nunca.

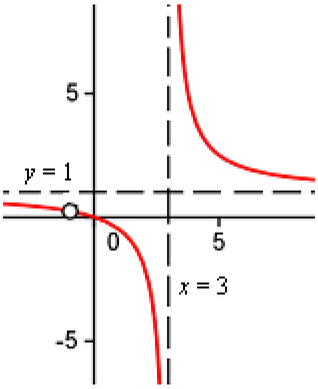
→ Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$ la función racional se llama propia. En caso contrario se llama impropia. Usando la división de polinomios, toda función racional puede escribirse como un polinomio más una función racional propia, pues:
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=c(x)+\dfrac{r(x)}{Q(x)}$, siendo $c(x)$ el cociente de la división $P(x):Q(x)$.
(Recuérdese que en toda división se cumple: $D(x)=d(x)\cdot c(x)+r(x)\Leftrightarrow\dfrac{D(x)}{d(x)}=c(x)+\dfrac{r(x)}{d(x)}$).
→ La división de polinomios puede recordarse pinchando aquí.

Ejemplo:
La función $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x^2+1}$ puede escribirse como $f(x)=2+\dfrac{x-2}{x^2+1}$. (Compruébalo).

Asíntotas:
Estas funciones suelen tener asíntotas. Se calculan aplicando límites.
→ Las asíntotas verticales, si las hay, se dan en las soluciones de $Q(x)=0$; y siempre que el límite en ese punto se haga infinito. Esto es, si $x = a$ es una raíz de $Q(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\infty\Rightarrow$ la recta $x = a$ es asíntota vertical de $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
→ $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tiene una asíntota horizontal si grado de $P(x)\leq$ grado de $Q(x)$. La asintota es la recta $y = b$, siendo $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.
→ $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tiene una asíntota oblicua siempre que el grado de $P(x)$ = 1 + grado $Q(x)$.
La ecuación de dicha asíntota puede obtenerse dividiendo: será el cociente de la división de $P(x):Q(x)$. En este caso: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=mx+n+\dfrac{r(x)}{Q(x)}$. La asíntota es la recta $y=mx+n$.

Ejemplos:

a) La función $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-2x-3}$, no está definida en los puntos $x = 3$ y $x = –1$.



Tiene una asíntota vertical en $x = 3$, pero no en $x = –1$, pues:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x}{x^2-2x-3}=\left[\frac{12}{0}\right]=\infty \Rightarrow x=3 \text{ es A.V.}$$

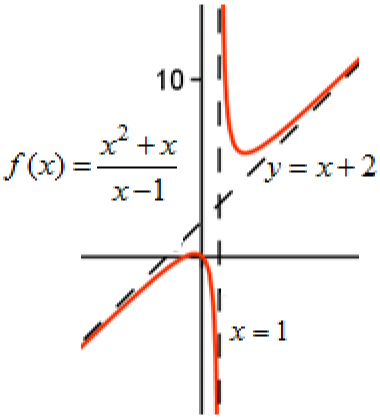
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2-2x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x-3}=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ En $x = –1$ no hay asíntota vertical.

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 1$, pues

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-2x-3}=1.$$

b) La función $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$ tiene dos asíntotas, una vertical (la recta $x = 1$) y otra oblicua, pues el numerador tiene un grado más que el denominador.



Dividiendo $(x^2+x):(x-1)$ por Ruffini se obtiene:

	1	1	0
1		1	2
	1	2	2

$\Rightarrow c(x)=x+2$; el resto, $r = 2$.

Por tanto: $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}=x+2+\dfrac{2}{x-1}$.

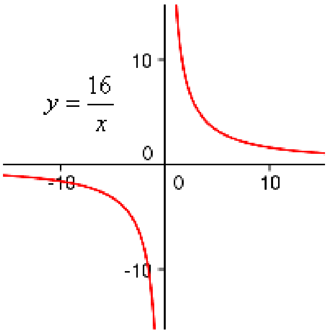
La asíntota oblicua es la recta $y=x+2$.

Observación: La determinación de la asíntota oblicua de cualquier función se hace con ayuda de los límites. En este caso, su ecuación $y=mx+n$, se obtiene así:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-x}=1;\ n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=2$$

Algunas funciones racionales: aplicaciones

Función de proporcionalidad inversa. Es un caso particular de función racional. Su expresión es $f(x)=\dfrac{k}{x}$ o $y=\dfrac{k}{x}$.



Su gráfica es una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.

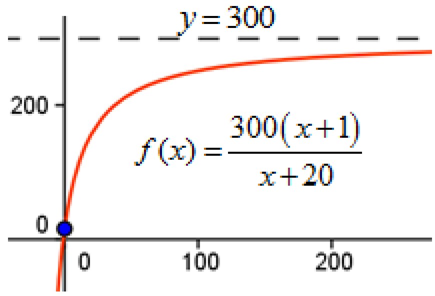
- Como puede observarse, $y=\dfrac{k}{x}\Leftrightarrow yx=k$, que indica que las variables x e y son inversamente proporcionales, con constante de proporcionalidad k.

La regla de tres simple inversa se ajusta a esta relación.

→ <u>Velocidad, espacio y tiempo</u>. Como resulta evidente, el tiempo para recorrer un espacio fijo, pongamos *e* km, es inversamente proporcional a la velocidad: a más velocidad se tarda menos tiempo. La relación conocida es $v=\dfrac{e}{t}$, que se puede expresarse como $t=\dfrac{e}{v}$ o $e=vt$.

→ Una función racional del tipo $f(x)=\dfrac{a(x+b)}{x+c}$, con *a*, *b* y *c* constantes, sirve para describir el número de éxitos que una persona puede conseguir después de *x* sesiones de prácticas.
Esta función nunca alcanza el valor *a*, al que tiende asintóticamente.

Ejemplos:
a) El número de pulsaciones por minuto (pul/min) de una persona que aprende mecanografía, puede venir dado por la función $f(x)=\dfrac{300(x+1)}{x+20}$, donde *x* indica las horas de práctica. Así, sin haber practicado nada es capaz de dar $f(0)=15$ pul/min; tras la primera hora de práctica dará $f(1)=\dfrac{300\cdot 2}{21}\approx 29$ pul/min; para 10 horas, $f(10)=\dfrac{300\cdot 11}{30}=110$.
→ Se admite que el máximo de pulsaciones será de 300 por min.



b) Comportamientos similares pueden admitirse para cualquier atleta que se entrena en una disciplina determinada. Al principio, con pocas horas de entrenamiento, mejora notablemente; pero para seguir progresando debe emplear cada vez más tiempo…

Pequeños retos

1. Determina el dominio y las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ c) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$ d) $f(x)=\dfrac{x^3-4x-3}{x^2+x}$

Expresa la función d) como una función racional propia.

2. Comprueba gráficamente las soluciones anteriores.
Nota: Para ello represéntalas con la ayuda del ordenador. Puede hacerse en Google).

Soluciones:
1. a) AV, $x = 3$; AH, $y = 0$. b) AV, $x = -1$; AH, $y = 2$. c) AV, $x = -2$; $x = 2$; AH, $y = 0$.
d) $f(x)=x-1-\dfrac{3x+3}{x^2+x}\to f(x)=x-1-\dfrac{3}{x}$; AV, $x = 0$; AO, $y=x-1$.
2. Para representar la función d), teclea en Google, (x^3–4*x–3)/(x^2+x), y obtendrás