

FUNCIONES POLINÓMICAS

Funciones polinómicas

Vienen dadas por una expresión de la forma $f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, con n un número natural.

El dominio de definición de estas funciones es todo \mathbf{R} : están definidas siempre.

El grado de una función polinómica es el del polinomio correspondiente.

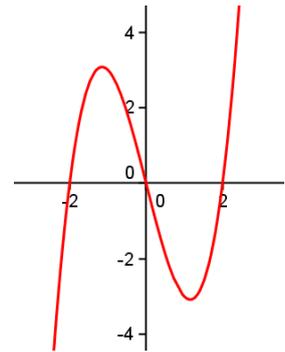
La función polinómica de grado n corta al eje OX en un máximo de n puntos. Las abscisas de los puntos de corte vienen dadas por las soluciones de la ecuación $a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Ejemplo:

La función $f(x) = x^3 - 4x$, corta al eje OX en las soluciones de la ecuación $x^3 - 4x = 0$. Estas soluciones son $x = -2, 0$ y 2 . Como puede observarse, $f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$.

El punto de corte con el eje OY se obtiene dando a x el valor 0 .

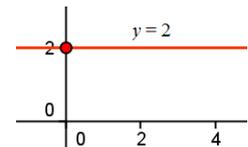
La gráfica de esta función es la adjunta.



- Las funciones polinómicas más sencillas son:

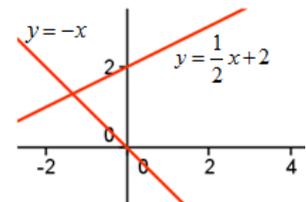
Función constante. Es la función polinómica de grado cero: $f(x) = a_0$ o $y = k$.

Su gráfica es una recta horizontal.



Función lineal (afín). Es la función polinómica de grado uno: $f(x) = a_1 x + a_0$ o $y = mx + n$.

Su gráfica es una recta de pendiente m y ordenada en el origen n : corta al eje OY en el punto $(0, n)$.



Función de proporcionalidad directa. Es un caso particular de la anterior.

Su expresión es $f(x) = mx$ o $y = mx$. Su gráfica es la de una recta que pasa por el origen. El coeficiente m indica la razón de proporcionalidad.

- Como puede observarse, $y = mx \Leftrightarrow \frac{y}{x} = m$, que indica que las variables

x e y son **directamente proporcionales**, con constante de proporcionalidad k .

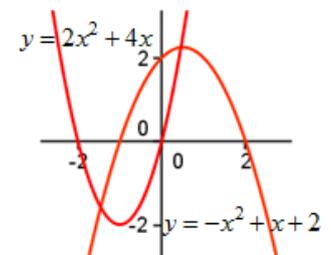
La regla de tres simple directa se ajusta a esta relación.

Función cuadrática. Es la función polinómica de grado dos,

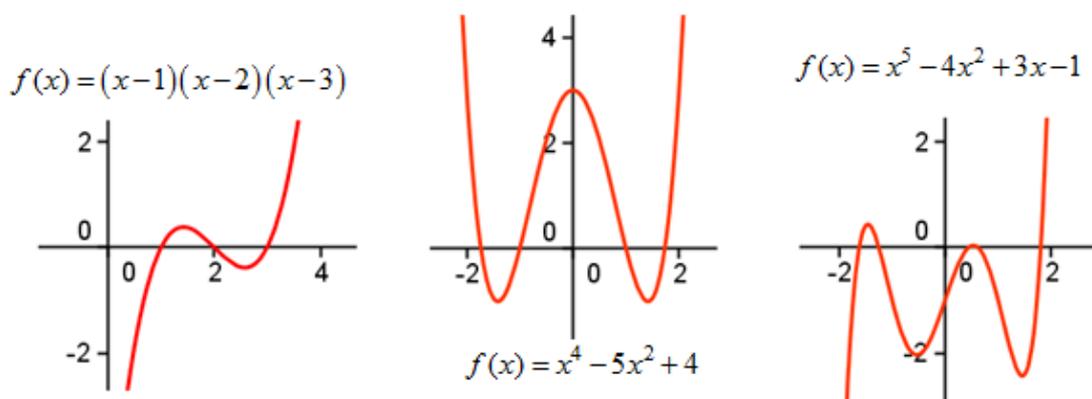
$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ o } y = ax^2 + bx + c.$$

Su gráfica es la de una parábola. Si $a > 0$, es convexa (\cup), su vértice está en el mínimo; si $a < 0$, es cóncava (\cap), su vértice está es el máximo.

- La gráfica de la función cuadrática corta al eje OX en dos puntos, en uno o en ninguno, dependiendo del número de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Las abscisas de los puntos de corte son las soluciones de esa ecuación.



- Otras gráficas de funciones polinómicas son:



Observaciones:

- A vista de estas gráficas, observa que las de grado mayor par tienen dos ramas apuntando hacia arriba: la función toma cada vez valores más grandes. Las gráficas de grado mayor impar “aparecen” por abajo y se “pierden” por arriba: toman valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$.
- Si el coeficiente principal, el correspondiente al mayor grado, fuese negativo las cosas serían al revés: las “ramas” apuntarían hacia abajo, si son de grado par; y las de grado impar tomarán valores desde $+\infty$ hasta $-\infty$.
- Las curvas asociadas a estas funciones pueden cortar al eje OX a lo sumo tantas veces como indica el grado de su término principal. Los puntos de corte son, en cada caso, las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Así, la función $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, corta al eje OX en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.
- Si una de estas funciones corta al eje OX menos veces de las que indica el grado, puede ser por dos motivos:

- 1) La ecuación correspondiente tiene raíces múltiples. Por ejemplo: $f(x) = x^4 - 2x^3 = x^3(x-2)$ sólo corta dos veces al eje OX , pues la solución $x = 0$ es triple.
- 2) La ecuación correspondiente tiene raíces complejas.

Por ejemplo: $f(x) = x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 2) = (x+1)(x-1)(x^2 + 2)$ sólo corta en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, pues las otras dos soluciones son complejas.

Pequeños retos

Determina los puntos de corte de las funciones de las siguientes funciones con los ejes de coordenadas.

- a) $y = 0,5x + 1$ b) $y = x^2 - 5x + 4$ c) $y = x^3 - 3x$ d) $y = x^4 - 5x^2 + 4$

Soluciones:

- a) $(0, 1)$ y $(-2, 0)$.
 b) $(0, 4)$, $(1, 0)$ y $(2, 0)$.
 c) $(0, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$
 d) $(0, 4)$, $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(2, 0)$.

Observación: Comprueba estos resultados representando gráficamente cada una de las funciones anteriores. Lo puedes hacer en Google, tecleando la expresión correspondiente. (Para la última: $x^4 - 5x^2 + 4$).