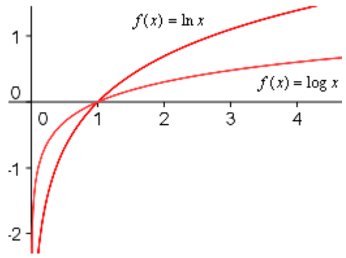
FUNCIONES LOGARÍTMICAS

La función logarítmica más sencilla es $f(x) = \log_a x \Leftrightarrow y = \log_a x$, ($a > 0$; $a \neq 1$).
Para las bases usuales, $a = 10$ y $a = e$: $f(x) = \log x$ y $f(x) = \ln x$.
Sus valores pueden hallarse con la calculadora.



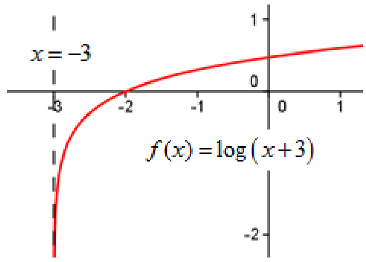
Características fundamentales:

- Su dominio es $\mathbf{R}^+$, los reales positivos: $x > 0$.
- Toma valores que van desde $-\infty$ a $+\infty$: Recorrido = $(-\infty, +\infty)$.
- El eje *OY*, la recta $x = 0$, es asíntota vertical de su curva, por la izquierda.
- Si $a > 1$ (que es lo usual), la función es creciente. (Si $0 < a < 1$, la función será decreciente).

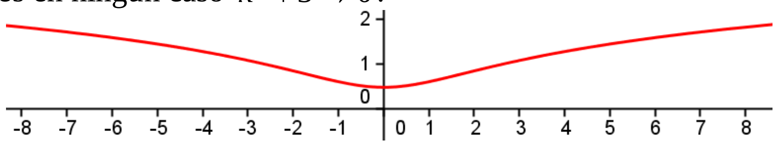
$\to$ La función general $f(x) = \log_a g(x)$ está definida siempre que $g(x) > 0$.

Ejemplos:

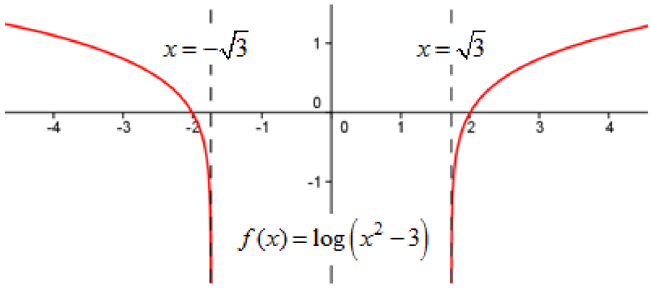
a) $f(x) = \log(x+3)$ está definida siempre que $x + 3 > 0$; esto es, cuando $x > -3$. Luego su dominio es el intervalo $(-3, +\infty)$. A la derecha de $x = -3$, la función se hace cada vez más grande y negativa: la recta $x = -3$ es asíntota vertical. Por tanto, $\lim_{x\to -3^+} \log(x+3) = -\infty$.



b) $f(x) = \log(x^2+3)$ está definida siempre, pues $x^2 + 3 > 0$ para todo *x*. Esta función no tiene asíntota vertical, pues en ningún caso $x^2 + 3 \to 0$.



c) $f(x) = \log(x^2-3)$ está definida siempre que $x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$. Cuando $x^2 - 3 \to 0$ la curva tiene asíntotas; así pues, si $x \to -\left(\sqrt{3}\right)^-$ o si $x \to \left(\sqrt{3}\right)^+$ la función tiende hacia $-\infty$.



Observaciones:

1) Como $f(x) = \log_a x \Leftrightarrow x = a^{f(x)}$, se deduce que las funciones exponencial y logarítmica son inversas; esto es, si aplicamos sucesivamente el logaritmo y la exponencial en la misma base, volvemos al punto de partida. O sea: $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$.
Esto permite utilizar los logaritmos para resolver ecuaciones de tipo exponencial.

2) Para trabajar con logaritmos es imprescindible conocer su definición y las propiedades más características.

Definición: $\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$; $a > 0$ y $a \neq 1$; $x > 0$.

Las propiedades pueden verse en este documento.

Ejemplos:

a) Para determinar *x* en la siguiente ecuación, $5 = 3^x$, hay que aplicar logaritmos como sigue:

$$\log 5 = \log\left(3^x\right) \Rightarrow \log 5 = x\log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1{,}46.$$

b) Con esto, podría plantearse el problema de "¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se duplique un capital a una tasa de interés del 3%?"

Es obvio que habría que resolver la ecuación $2C_0 = C_0(1+0{,}03)^t \Leftrightarrow 2 = (1+0{,}03)^t \Rightarrow t = 23{,}45$ años.

Observación: Las ecuaciones logarítmicas pueden verse en este documento.

Pequeños retos

1. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x) = \log(6-2x)$ b) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ c) $f(x) = x\ln x$ d) $f(x) = \log(x-1)^2$

2. Con ayuda de un ordenador representa gráficamente las funciones anteriores.

a) Comprueba que los dominios determinados en el ejercicio anterior son correctos.

b) Determina visualmente las asíntotas de esas funciones.

$\to$ Para representar $f(x) = \log(6-2x)$, teclear en Google log(6–2*x)

Soluciones:

1. a) $x < 3$. b) **R**. c) $x > 0$. d) **R** – {1}.

2. Asíntotas: a) $x = 3$, por la derecha. b) No tiene asíntotas. c) No tiene asíntotas. d) $x = 1$, por ambos lados.

Observación:

Al representar la función $f(x) = \log(x-1)^2$ he comprobado que el ordenador dibuja la función $f(x) = 2\log(x-1)$, pues aplica la propiedad $\log A^n = n\log A$. Restringe así el dominio de definición de la función: con el cuadrado es **R** – {1}; sin el cuadrado es $x > 1$.

Si se quiere representar $f(x) = \log(x-1)^2$, sin pasar el 2 delante del logaritmo, hay que escribir $f(x) = \log\left((x-1)^2\right) \to$ log((x–1)^2)