COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. FUNCIÓN INVERSA

Composición de funciones

Cuando sobre la imagen, $f(x)$, de una función *f*, actúa otra función *g* se tiene la función compuesta $g(f(x))$. Primero actúa *f* y después *g*. El dominio de *g* será el recorrido de *f*. Esquemáticamente ese tendría:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

De manera análoga puede definirse $f(g(x))$: primero actúa *g*, después *f*. El dominio de *f* será el recorrido de *g*.

La composición de funciones no es conmutativa; esto es, en general, $g(f(x)) \neq f(g(x))$

Ejemplo:

Si $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 4$, la función $g(f(x)) = \left(f(x)\right)^2 - 3 = (2x+3)^2 - 4$.

Luego, $g(f(x)) = 4x^2 + 12x + 5$.

Por tanto, para $x = -1$ o $x = 2$ se tendrá: $g(f(-1)) = 4\cdot(-1)^2 + 12\cdot(-1) + 5 = -3$ y $g(f(2)) = 45$.

Si las funciones actúan sucesivamente (primero *f* y después *g*), se tendría el mismo resultado.

Para $x = -1$: $-1 \to f(-1) = 1 \to g(1) = -3$.

Para $x = 2$: $2 \to f(2) = 7 \to g(7) = 49 - 4 = 45$.

La función $f(g(x))$ será: $f(g(x)) = 2(g(x)) + 3 = 2(x^2 - 4) + 3 = 2x^2 - 5$.

Es evidente que la composición de funciones no es conmutativa.

Funciones inversas (o recíprocas)

Dos funciones *f* y *g* son inversas cuando su composición da la identidad. Esto es, cuando se cumple que: $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$.

La función inversa de *f* se designa por f^{-1}.

Observaciones:

1) No siempre existe la función inversa de *f*. Para que exista es necesario que la función *f* sea inyectiva, que quiere decir que a valores distintos les asocia imágenes distintas. No obstante, algunas veces, como en el caso de las funciones trigonométricas, se sigue hablando de funciones inversas, aunque no lo sean. (En el ejemplo siguiente se aclarará este punto.)

2) No hay que confundir la función inversa con la inversa de una función. La inversa de una función *f* es la función $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$. Así, si $f(x) = x - 3$, $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{x-3}$.

Ejemplos:

a) Funciones inversas son: $f(x) = \log x$ y $g(x) = 10^x$; o $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$.

En ambos casos se cumple que $f\left(g(x)\right) = x$. En efecto:

$$f\left(g(x)\right) = \log 10^x = x \text{ y } g\left(f(x)\right) = 10^{\log x} = x; \quad f\left(g(x)\right) = \ln e^x = x \text{ y } g\left(f(x)\right) = e^{\ln x} = x$$

b) Para $x \geq 0$, $f(x) = x^2$ y $g(x) = +\sqrt{x}$ son funciones inversas. (La expresión $g(x) = \sqrt{x}$ no es estrictamente la de una función, pues a cada número real $x \geq 0$, le asocia dos valores. Por ejemplo, $g(4) = \sqrt{4} = \pm 2$. Tampoco la función $g(x) = +\sqrt{x}$ está definida para $x < 0$).

La función $f(x)=x^2$ no es inyectiva en **R**, pues a números opuestos, x y $-x$, les asocia el mismo valor: $f(x)=x^2=(-x)^2=f(-x)$. En cambio sí lo es en el intervalo [0, +∞).
Por tales motivos, para afirmar que $f(x)=x^2$ y $g(x)=+\sqrt{x}$ son funciones inversas hay que restringir el domino de la función f.

c) Para $0\le x<\pi$, $f(x)=\cos x$ y $g(x)=\arccos x$.
La expresión $g(x)=\arccos x$ asigna infinitos valores a x, pero uno solo en el intervalo [0, π).

→En las calculadoras los pares de funciones inversas aparecen en la misma tecla (una sobre otra). Por ejemplo: sin y $\sin^{-1}$; cos y $\cos^{-1}$; log x y 10^x; ln x y e^x. Para acceder a la inversa se pulsa SHIFT.

¿Cómo se halla la función inversa?
Conocida la función $f(x)$, su función inversa se determina resolviendo la ecuación $f(g(x))=x$.

Ejemplo:
Si $f(x)=x^2+2$, su función inversa $g(x)$ debe cumplir que

$$f(g(x))=(g(x))^2+2=x\Rightarrow \text{(despejando)}\to (g(x))^2=x-2\;\Rightarrow\; g(x)=+\sqrt{x-2}.$$

Como puede verse:

$$f(g(x))=\left(\sqrt{x-2}\right)^2+2=(x-2)+2=x\text{; y } g(f(x))=+\sqrt{f(x)-2}=+\sqrt{x^2+2-2}=x$$

Por tanto, $g(x)=f^{-1}(x)=+\sqrt{x-2}$. (Esta inversa sólo es válida para $x\ge 2$).

Imagen inversa de un número
Para cualquier valor y_0 del recorrido de la función f, su imagen inversa, $f^{-1}(y_0)$, es el conjunto de los números x, del dominio, que se transforman mediante f en y_0. Esto es,

$$f^{-1}(y_0)=\{x\in \mathbf{R}\,|\,f(x)=y_0\}.$$

- Para hallar $f^{-1}(y_0)$ se resuelve la ecuación $f(x)=y_0$.
- En particular, $f^{-1}(0)$ da los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

Ejemplos:
a) Si $f(x)=x^2-4$, la imagen inversa de 0, $f^{-1}(0)$, son las soluciones de $x^2-4=0$. Esto es, $x=-2$ y $x=2$. Luego, $f^{-1}(0)=\{-2, 2\}$.

b) Si $f(x)=\cos x$, la imagen inversa de 0, $f^{-1}(0)$, son las soluciones de $\cos x=0$. Esto es,

$$x=\arccos 0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi. \text{ Luego, } f^{-1}(0)=\left\{x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}.$$

Pequeños retos
1. Si $f(x)=x-1$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2+3x}$, halla: a) $g\left(f(2)\right)$ y $f\left(g(2)\right)$. b) la expresión general de $g\left(f(x)\right)$ y de $f\left(g(x)\right)$. c) El dominio de cada una de esas funciones compuestas.
2. Halla la función inversa de $f(x)=3x-5$.
3. Para las funciones $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=\log x$, halla la imagen inversa de 5. →→

Soluciones:

1. a) $g\left(f(2)\right)=\frac{1}{4}$ y $f\left(g(2)\right)=-\frac{4}{5}$. b) $g\left(f(x)\right)=\frac{1}{x^2+x-2}$ y $f\left(g(x)\right)=\frac{-x^2-3x+1}{x^2+3x}$.

c) $\mathrm{Dom}\left(g\left(f(x)\right)\right)$ = **R** – {–2, 1}; $\mathrm{Dom}\left(f\left(g(x)\right)\right)$ = **R** – {–3, 0}.

2. $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$.

3. $f^{-1}(5)$ = {–3, 3}; $g^{-1}(5)=10^5$