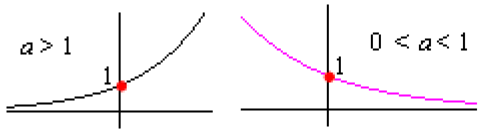
FUNCIONES EXPONENCIALES

Una función es de tipo exponencial cuando la variable independiente figura en el exponente.
La más sencilla es de la forma

$f(x) = a^x \Leftrightarrow y = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$.

Características fundamentales de $f(x) = a^x$

- Su domino es **R**.
- Siempre toma valores positivos. Esto es: $f(x) = a^x > 0$, para todo x.



- Si la base $a > 1$, la función siempre es creciente.
- Si la base $0 < a < 1$, la función siempre es decreciente.
- Corta al eje *OY* en $y = 1$, pues $a^0 = 1$, para cualquier valor de a.
- El eje *OX*, la recta $y = 0$, es una asíntota horizontal de la función; hacia $-\infty$ si $a > 1$, y hacia $+\infty$ si $0 < a < 1$.

Observación: La función $f(x) = a^{-x}$ es idéntica a $f(x) = \dfrac{1}{a^x}$, y la misma que $f(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$. Así, por ejemplo: $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$. En consecuencia, $f(x) = a^{-x}$ con $a > 1$ es decreciente siempre, pues $0 < \dfrac{1}{a} < 1$.

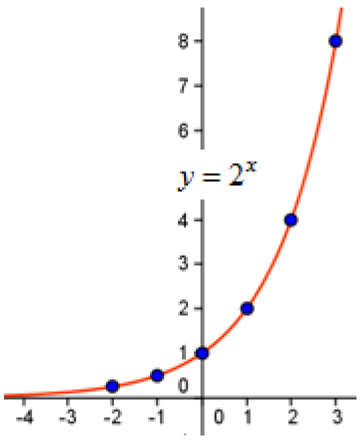
- Dos casos comunes de la función exponencial son $f(x) = 10^x$ y $f(x) = e^x$.

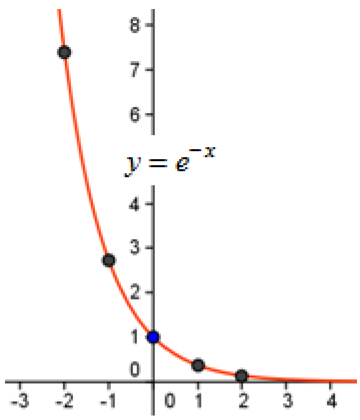
También son frecuentes $f(x) = 10^{-x}$ y $f(x) = e^{-x}$. Estas últimas funciones pueden escribirse como $f(x) = \dfrac{1}{10^x}$ y $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$.

Estas características permiten dibujar la gráfica de estas funciones, en casos elementales, con mucha facilidad.

Ejemplos:

a) Para trazar $y = 2^x$ basta con conocer unos cuantos puntos: (0, 1), (1, 2), (2, 4) y (–1, 1/2) sería suficiente. Como se sabe que es creciente y que hacia $-\infty$ se pega al eje *OX* por encima de él, su gráfica es la de abajo.





b) Igualmente, para dibujar $y = e^{-x}$ basta con dar algunos valores: (0, 1), (–1, e) ≡ (–1, 2,72); (–2, e^2) ≡ (–2, 7,39); (1, 1/e) ≡ (1, 0,37). Como se sabe que es decreciente y que hacia +∞ se pega al eje *OX* por encima, su gráfica es la de arriba.

• La función general $f(x) = a^{g(x)}$, con $a > 0$, está definida siempre que lo esté $g(x)$.
→ Estas funciones están ligadas a problemas de capitalización y de descuento, de crecimiento malthusiano y de descomposición de sustancias radiactivas, entre otros.

Ejemplos:
a) $f(x) = 2^{3-x}$ está definida para todo número real.

b) $f(x) = 2^{\frac{1}{3-x}}$ está definida para todo número real distinto de 3: Dom = **R** – {3}.

c) La función $C(t) = C_0(1+r)^t$ da el capital acumulado al cabo de *t* años, a una tasa de interés anual *r* (en tanto por uno), para un capital inicial C_0. Así, un capital de 1000 €, al 6% anual, se convierte al cabo de 8 años en $C(8) = 1000(1+0,06)^8 = 1000 \cdot (1,06)^8 = 1593,85$ €.

d) La mitosis es un proceso de duplicación celular. Una de las bacterias de más rápido crecimiento es la *escherichia coli*, pues en determinadas condiciones puede duplicarse cada 20 minutos. La expresión $f(x) = 2^{3x}$ da el número de células al cabo de *t* horas por cada célula inicial. Así, de una sola célula, al cabo de 12 horas habría 2^{36} = 68719476736 células → 6,87… × 10^{10}.

e) El porcentaje de carbono-14 en restos muertos (plantas, animales…) puede darse por la fórmula $p(t) = 100 \cdot e^{-0,00012t}$. Esto significa que al cabo de 1000 años, por ejemplo, ese porcentaje será $p(1000) = 100 \cdot e^{-0,12}$ = 88,7%; y transcurridos 10000 años, del $p(10000) = 100 \cdot e^{-1,2}$ = 30,1%

Asíntotas:
Para la determinación de las asíntotas hay que recurrir al cálculo de límites.
→ Para las horizontales hay que estudiar los límites hacia +∞ y hacia –∞. Esto es, si $f(x) = a^{g(x)}$ hay que calcular: $\lim_{x\to+\infty}\left(a^{g(x)}\right)$ y $\lim_{x\to-\infty}\left(a^{g(x)}\right)$. → (Debe recordarse que $a^{-\infty} \to 0$, si $a > 1$).
→ Las verticales, que se dan necesariamente en puntos en los que la función no está definida, deben calcularse los límites laterales en dichos puntos.
(Si el lector está interesado puede ver el problema 27 de este documento).

Pequeños retos
Determina el dominio de definición y las asíntotas (si las hubiese) de las funciones:

a) $f(x) = 2^{5-x}$ b) $f(x) = e^{\frac{1}{x+2}}$ c) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$ d) $f(x) = 3^{\frac{x}{x-1}}$

Soluciones:
a) **R**; A.H.: $y = 0$, hacia +∞. b) **R** – {–2}; A.H.: $y = 1$, por ambos lados; A.V: $x = –2$, por la derecha. c) **R**; A.H.: $y = 1$, por ambos lados. d) **R** – {1}; A.H.: $y = 3$, por ambos lados; A.V: $x = 1$, por la derecha. → (En todos los casos se recomienda hacer las gráficas con el ordenador).