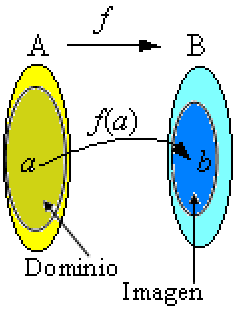
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN. DOMINIO Y RECORRIDO

Concepto de función



Dados dos conjuntos **A** y **B**, una función de **A** en **B** es una relación (una ley) que asigna a cada elemento de **A** uno y sólo un elemento de **B.**
La notación *f*: **A** → **B** indica que *f* es una función de **A** en **B**; mientras que $f(a)=b$ indica que al elemento *a* de **A** se le asocia el elemento *b* del conjunto **B**. También se dice que *b* es la imagen de *a*. El elemento *a* y su imagen *b* determinan el par (*a*, *b*). Para cada *a*, su imagen *b* debe ser única.
Con esto, puede decirse que: "Una función *f* entre dos conjuntos **A** y **B** es un conjunto de pares ordenados (*a*, *b*), de manera que no hay dos pares con el mismo primer elemento".
Así, por ejemplo, los pares (2, 1) y (2, 3) no pueden pertenecer a la misma función, pues eso indicaría que al número 2 le corresponden dos números, el 1 y el 3, en contra de que la correspondencia debe ser única.

Dominio de *f*, Dom(*f*). Es el conjunto de los elementos de **A** que intervienen en la relación.
Imagen o recorrido de una función *f*, Im(*f*), es el conjunto de valores que toma $f(a)$ cuando *a* pertenece al dominio.
Si la función viene dada por el conjunto de pares (a_i, b_i), su dominio está formado por los elementos a_i, mientras que su imagen son los elementos b_i.

Función real de variable real

Es una función que asocia a cada número real otro número real. Se indica así: *f*: **R** → **R**.
Si el par (*x*, *y*) pertenece a la función *f*, significa que $f(x)=y$. Así pues, el domino lo forman los números *x* para los cuales existe el valor de $f(x)$. La imagen, el conjunto de valores que toma $f(x)$ cuando *x* pertenece al dominio; es, por tanto, el conjunto de resultados.
A *x* se le llama variable independiente. Cuando se representa se hace en el eje horizontal, el eje de abscisas, el eje *OX*. La *y* es la variable dependiente. Se representa en el eje vertical o de ordenadas, el eje *OY*. Ambas variables son números reales.

- Las funciones reales suelen darse mediante una fórmula o expresión algebraica. Por ejemplo: $f(x)=x^2-3x$; $g(x)=+\sqrt{3-x}$. También se escribe: $y=x^2-3x$; $y=\sqrt{3-x}$

Ejemplos:

a) La función $f(x)=x^2-3x$ asocia al número 2 → $f(2)=2^2-3\cdot 2=-2$; a 3 → 0; a –1 → 4.
El dominio de esta función es Dom(*f*) = **R**, todos los números reales, pues para cualquier número real *x* tiene sentido (puede hacerse) la operación x^2-3x.
El recorrido de $f(x)=x^2-3x$ es el conjunto de resultados que tome la expresión x^2-3x para cualquier valor de *x*. (Más arriba se ha visto que –2, 0 y 4 son del recorrido).

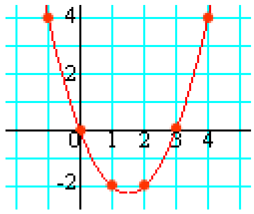
b) La función $g(x)=+\sqrt{3-x}$ asocia al número 2 → $g(2)=\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$; ; a 3 → 0; a –1 → 2.
En cambio, a 4 no puede asociarle ningún número real, pues $g(4)=\sqrt{3-4}=\sqrt{-1}$.
El dominio de $g(x)$ está formado por los números reales menores o iguales que 3:
Dom(*g*) = $\{x\in \mathbf{R} \mid x\le 3\} = (-\infty, 3]$.
El recorrido de $g(x)=+\sqrt{3-x}$ son los resultados que se obtienen al calcular la raíz cuando $x\le 3$: son los números reales mayores o iguales que 0. Esto es, Im(*g*) = $[0, +\infty)$.

Gráfica de una función. Las funciones de variable real suelen representarse en el plano mediante una línea. Los puntos de esa línea son $(x,\ f(x))$, siendo x del dominio de f.

Ejemplo:

Los pares de elementos relacionados por $f(x) = x^2 - 3x$ pueden darse con ayuda de una tabla. Así:

x	0	1	2	3	–1	–2	...
$f(x)$	0	–2	–2	0	4	10	…



Representando en el plano cartesiano esos pares (puntos (0, 0), (1, –2), (2, –2), (3, 0), (–1, 4), (–2, 10)…) y uniéndolos mediante una línea continua se obtiene la gráfica de dicha función.

Observaciones sobre el dominio de definición de las funciones usuales

- El dominio de f es el conjunto: Dom(f) = $\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$

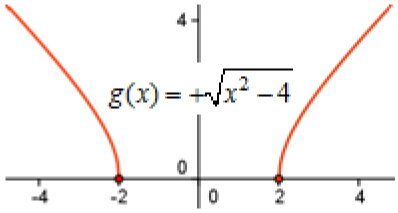
El valor de $f(x)$ no existe cuando alguna de las operaciones que la definen no puede realizarse. Por ejemplo: la división por cero, la raíz de un número negativo, el logaritmo de un número menor o igual que cero;... (en esos casos, al operar con calculadora saldrá el mensaje de ERROR). Otras veces será la naturaleza del problema lo que restringa su dominio; por ejemplo, un tiempo o una longitud no pueden tomar valores negativos.

- La imagen de f es el conjunto: Im(f) = $\{y \in \mathbf{R} \mid y = f(x),\ x \in \text{Dom}(f)\}$

Ejemplos:

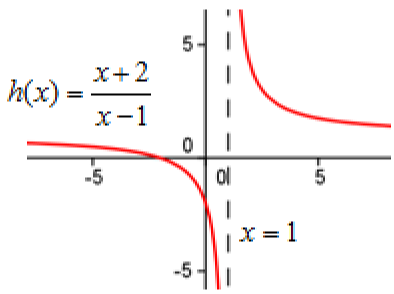
- La función $f(x) = x^2 - 4$ tiene por dominio todos los números reales: Dom(f) = **R**.

Su recorrido son los números reales $x \geq -4$: Im(f) = $[-4, +\infty)$.



- La función $g(x) = +\sqrt{x^2 - 4}$ está definida cuando $x^2 - 4 \geq 0$: para valores de $x \geq 2$ o $x \leq -2$. Su recorrido son los números reales no negativos. (Ver figura).

- La función $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ no está definida cuando $x = 1$; su dominio es: Dom(h) = **R** – {1}. (Ver figura).



- La función $e(t) = 80t$, que determina el espacio recorrido por un vehículo que se mueve a 80 km/h durante un tiempo t, sólo tiene sentido para $t \geq 0$.

→ Si lo que se conoce es la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces:

El dominio viene dado por los valores del eje horizontal (eje OX) que tienen correspondiente.

En la figura: $\text{Dom}(f) = [0,\ 6) \cup [7,\ 10)$.

La imagen, $f(x_0)$, de un número x_0, es el valor de la distancia, medida verticalmente, desde x_0 hasta la gráfica de f. Si la gráfica transcurre por debajo del eje, la imagen es negativa.

El recorrido viene dado por los valores del eje vertical (eje OY) que son correspondiente de algún x del dominio. En la figura: $\text{Im}(f) = [-2,\ 1] \cup [2,\ 5]$.