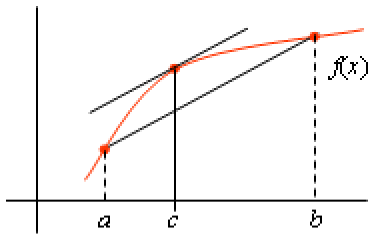
TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Teorema del valor medio de Lagrange (Italiano, 1736/1813)
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

- Interpretación geométrica: existe un punto perteneciente al intervalo en el que la tangente a $f(x)$ es paralela a la secante que pasa por los puntos de abscisa a y b.



De otro modo: existe un punto del intervalo en el que la tasa de variación instantánea coincide con la tasa de variación media de todo el intervalo. Recuerda que la tasa de variación media de una función en un intervalo viene dada por la expresión:

$$TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- Interpretación física: si se realiza un trayecto a velocidad media v, en algún instante de ese trayecto se ha llevado esa velocidad v.

Ejemplos:
La función $f(x) = x^3 - 6x$ es continua y derivable en el intervalo $[-2, 1] \Rightarrow \exists\, c$, $-2 < c < 1$, tal que $\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = f'(c)$.

En efecto: $\dfrac{-5-4}{1-(-2)} = 3x^2 - 6 \Rightarrow -3 = 3x^2 - 6 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$.

El valor que cumple el teorema es $x = -1$, el número que pertenece a $(-2, 1)$.

Ejercicio 1

¿Puede aplicarse, en el intervalo [0, 1], el teorema del valor medio a la función $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$? En caso afirmativo calcula el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

En el intervalo [0, 1], la función $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ es continua y derivable (sólo es discontinua en $x = 2$, que no pertenece a ese intervalo).

Hay que buscar el valor de x que cumple: $\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = f'(x)$

Como $f(1) = 1$, $f(0) = \dfrac{1}{2}$ y $f'(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$, debe cumplirse que:

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{1-0} = \frac{1}{(2-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{(2-x)^2} \Rightarrow 2 = (2-x)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2-\sqrt{2} \\ x = 2+\sqrt{2} \end{cases}.$$

La respuesta válida es $x = 2-\sqrt{2}$, que es el punto que pertenece al intervalo (0, 1)

Observación:
La verificación del teorema no exige hacer la derivada para encontrar el punto $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Basta con comprobar que la función en cuestión cumple las hipótesis exigidas en el intervalo dado. Así se pone de manifiesto en el siguiente ejercicio (propuesto en la selectividad de 2014 en Navarra).

Ejercicio 2

Dada la función $f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6x}\right)+\dfrac{2}{\sqrt{17-2x-3x^2}}$, demuestra que existe un valor $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. → Ayuda: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1, \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución:
La función dada cumple el teorema de Lagrange, pues:
- Es continua en el intervalo [1, 2]. Basta con ver que la raíz cuadrada que aparece no se anula en ese intervalo: $x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-3)\cdot 17}}{2\cdot(-3)}=\dfrac{2\pm\sqrt{208}}{-6}\approx\begin{cases}-2,74\\ 2,07\end{cases}$.

También es derivable (básicamente por lo mismo). Aunque no es necesario hacerla, su derivada es:

$$f'(x)=\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6x}\right)\right)\cdot\left(\frac{-\pi}{6x^2}\right)+\frac{2+6x}{\sqrt{\left(17-2x-3x^2\right)^3}}$$

Por tanto, en el intervalo [1, 2], se cumple que $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(\alpha)$, con $1 < \alpha < 2$.

Como:

$$f(1)=\tan\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{2}{\sqrt{12}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2}{2\sqrt{3}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$f(2)=\tan\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{2}{\sqrt{1}}=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)+2=\frac{1}{\sqrt{3}}+2$$

Entonces:

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+2-\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1}=\frac{1}{1}=1=f'(\alpha)$$, que es lo que se quería probar.

Pequeños retos

1. Para $f(x)=x^2-2x-1$, halla el punto del intervalo [0, 3] que satisface el teorema del valor medio.

2. Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x)=\ln x$, en el intervalo $[1, e^2]$, determinando el valor de c, $1 < c < e^2$, para el que se verifica dicho teorema.

Soluciones:
1. $x = 4/3$.
2. $x=\dfrac{e^2-1}{2}$.