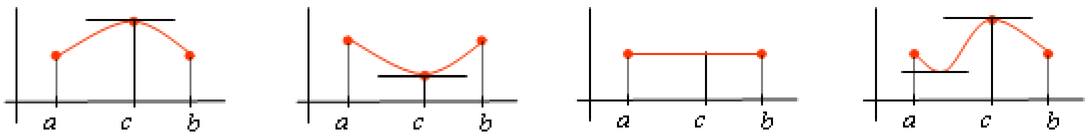
TEOREMA DE ROLLE

Teorema de Rolle (Francés, 1652/1719)
Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y si $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f´(c) = 0$.
Geométricamente, la comprobación es evidente: existe un punto –al menos– de ese intervalo, en el que la tangente a la curva es horizontal.



En ese punto c se da el máximo o el mínimo de $f(x)$ en ese intervalo.
(En el tercer dibujo todos los puntos del intervalo cumplen en teorema; en el cuarto dibujo hay un mínimo y un máximo en el intervalo dado).

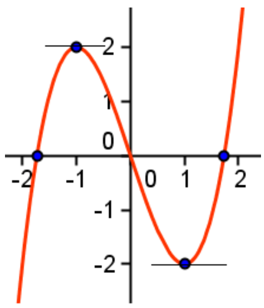
Ejemplos:
a) La función $f(x) = x^2 + x + 2$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 1], pues:

- es continua y derivable en todo **R**; en particular en el intervalo [–2, 1].
- $f(-2) = 4$ y $f(1) = 4$. Esto es, toma el mismo valor en los extremos del intervalo.

En consecuencia, existe un punto $c \in (-2, 1)$ en el que su derivada vale 0:

$$f´(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2.$$

El valor $c = -1/2$ es el que asegura el teorema: $f´(-1/2) = 0$.



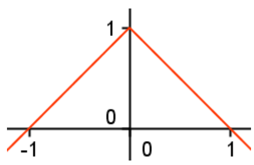
b) La función $f(x) = x^3 - 3x$ verifica las hipótesis de Rolle en el intervalo $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$, pues es continua y derivable en todo **R**; además

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = f\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\sqrt{3} = 0.$$

En consecuencia, existe un punto $c \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ en el que su derivada vale 0.
En efecto:

$$f´(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

En este caso hay dos valores: $x = -1$, que se corresponde con un máximo; y $x = 1$, en donde se da un mínimo.
(Gráficamente la situación es la se muestra en la figura).



c) La función $f(x) = 1 - |x|$ no satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 1], pues aunque cumple que $f(-1) = f(1) = 0$, sin embrago no es derivable en el punto $x = 0$ de ese intervalo. Por eso, aunque tenga máximo en $x = 0$, no se cumple que $f´(0) = 0$.

Observación:
La verificación del teorema no exige hacer la derivada para encontrar el punto $c \in (a, b)$ tal que $f´(c) = 0$. Basta con comprobar que la función en cuestión cumple las hipótesis exigidas en el

intervalo dado. Así se pone de manifiesto en los dos siguiente ejercicios (propuestos en la selectividad de 2014 en Navarra), en los que se dan funciones con derivada difícil y, posiblemente, con ecuaciones $f'(x)=0$ imposibles de resolver.

Ejercicio 1

Dada la función $f(x)=\dfrac{\cos\left(x^3+2x^2+3x\right)}{\sqrt{x^2+x+2}}$, demuestra que existe un valor α ∈ (–2, 1) tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

La función dada es continua y derivable en todo **R**, en particular en el intervalo [–2, 1]. (Basta con observar que el denominador, el radicando, nunca toma el valor 0). Por tanto, cumple el teorema de Rolle.

Además, $f(-2)=\dfrac{\cos(-8+8-6)}{\sqrt{4-2+2}}=\dfrac{\cos(-6)}{2}$ y $f(1)=\dfrac{\cos(1+2+3)}{\sqrt{1+1+2}}=\dfrac{\cos 6}{2}\Rightarrow f(-2)=f(1)$.

En consecuencia existe un valor α ∈ (–2, 1) tal que $f'(\alpha)=0$.

Ejercicio 2

Dada la función $f(x)=(x-2)e^{\sqrt{x^2-4x+5}}\cos\left(\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{2}x\right)$, demuestra que existe un valor α ∈ (1, 3) tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

La función dada es continua y derivable en todo **R**, en particular en el intervalo [1, 3]. (Basta con observar que el radicando del exponente nunca toma valores negativos; las otras dos funciones, el binomio y el coseno no presentan ningún inconveniente).

Además, se cumple que:

$$f(1)=-e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \text{ y } f(3)=e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right)=e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{7\pi}{10}+\pi\right)=-e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=f(3)$$

Por tanto, esa función cumple el teorema de Rolle ⇒ existe un valor α ∈ (1, 3) tal que $f'(\alpha)=0$.

Pequeños retos

1. Demuestra que la función $f(x)=x^4-2x^2-1$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2]. Halla el valor de c que cumple el teorema.

2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$, demuestra que existe un valor α ∈ (–2, 1) tal que $f'(\alpha)=0$.

Soluciones:

1. Hay tres valores de c que cumplen el teorema: $x=-1$, $x=0$ y $x=1$.

2. La función dada cumple el teorema de Rolle: es continua y derivable en todo **R**; además

$$f(-2)=\frac{-8+4+4+1}{\sqrt{4-2+2}}=\frac{1}{2} \text{ y } f(1)=\frac{1+1-2+1}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow f(-2)=f(1)$$