REGLAS DE DERIVACIÓN PARA LAS OPERACIONES CON FUNCIONES

En los apartados que siguen, *k* y *n* son números; *x* designa la variable independiente e *y*, *f* , *F* o *g* representan funciones de *x*.

1. Derivada de una constante por una función:

$$F(x) = k\cdot f(x) \to \left(F(x)\right)' = \left(k\cdot f(x)\right)' = k\cdot f'(x)$$

Ejemplos:

a) Si $y = kx^n \Rightarrow y' = k\cdot nx^{n-1}$.

b) Si $y = 7x^5 \Rightarrow y' = 7\cdot 5x^4 = 35x^4$.

c) Si $y = 3\sin x \Rightarrow y' = 3\cdot\cos x$.

d) Si $y = \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}e^x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}e^x$.

2. Derivada de una suma o diferencia de funciones:

$$F(x) = f(x) \pm g(x) \to \left(F(x)\right)' = \left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

Ejemplos:

a) Si $f(x) = 5x^3$ y $g(x) = -4x^6 \Rightarrow \left(f(x) + g(x)\right)' = 15x^2 - 24x^5$.

b) Si $y = \dfrac{1}{x} + 4\sqrt{x} - x + 3x^2 \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2} + 4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 + 6x = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1 + 6x$.

3. Derivada de un producto de funciones:

$$F(x) = \left(f\cdot g\right)(x) = f(x)\cdot g(x) \to \left(F(x)\right)' = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ejemplo:

a) Si $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = 3 - 5x^2 + 2x^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(f(x)\cdot g(x)\right)' = (8x-2)\cdot(3 - 5x^2 + 2x^4) + (4x^2 - 2x + 1)\cdot(-10x + 8x^3) =$$

$$= 48x^5 - 20x^4 - 72x^3 + 30x^2 + 14x - 6.$$

Si se multiplican antes las dos funciones y se deriva después, se obtiene:

$$f(x)\cdot g(x) = (4x^2 - 2x + 1)\cdot(3 - 5x^2 + 2x^4) = 8x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 10x^3 + 7x^2 - 6x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f(x)\cdot g(x)\right)' = 48x^5 - 20x^4 - 72x^3 + 30x^2 + 14x - 6.$$

Naturalmente, el resultado es el mismo.

b) Si $f(x) = x^2\cdot e^{-3x^2+x} \Rightarrow f(x) = 2x\cdot e^{-3x^2+x} + x^2\cdot\left(-6x+1\right)e^{-3x^2+x} = \left(-6x^3 + x^2 + 2x\right)\cdot e^{-3x^2+x}$

4. Derivada de un cociente de funciones:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \to \left(F(x)\right)' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Ejemplo:

a) Si $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{4x - 1} \Rightarrow y' = \dfrac{(6x-2)\cdot(4x-1) - (3x^2 - 2x + 1)\cdot 4}{(4x-1)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{12x^2 - 6x - 2}{(4x-1)^2}$.

b) Si $y = \dfrac{12x^2 - 6x - 2}{\left(4x-1\right)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{\left(24x-6\right)\left(4x-1\right)^2 - \left(12x^2 - 6x - 2\right)\cdot 2\left(4x-1\right)\cdot 4}{(4x-1)^4} \to$

$$\to \text{(simplificando)} \Rightarrow y' = \frac{(24x-6)(4x-1)-(12x^2-6x-2)\cdot 2\cdot 4}{(4x-1)^3} = \frac{22}{(4x-1)^3}$$

5. Derivada de la opuesta de una función:

$$F(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} \to (F(x))' = \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

Ejemplo:

Para la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ se tendrá: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{3x^2-5x+1}\right)' = \frac{-(6x-5)}{(3x^2-5x+1)^2}$.

Evidentemente, esta función también se podría derivar como un cociente. Así:

$$y = \frac{1}{3x^2-5x+1} \Rightarrow y' = \frac{0\cdot(3x^2-5x+1)-1\cdot(6x-5)}{(3x^2-5x+1)^2} = \frac{-(6x-5)}{(3x^2-5x+1)^2}$$

6. Derivada de la función compuesta:

$$F(x) = f(g(x)) \to (F(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Ejemplo:

Si $f(x) = 3x^4$ y $g(x) = \ln x \Rightarrow f(g(x)) = 3(\ln x)^4$.

Su derivada será: $[f(g(x))]' = 3\cdot 4(\ln x)^3\cdot\frac{1}{x}$.

De manare análoga: $g(f(x)) = \ln(3x^4) \Rightarrow [g(f(x))]' = \frac{1}{3x^4}\cdot 12x^3 = \frac{4}{x}$.

7. Derivación logarítmica: caso $F(x) = (f(x))^{g(x)}$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de la función $F(x) = (f(x))^{g(x)}$, queda:

$$\ln F(x) = \ln(f(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \ln F(x) = g(x)\cdot\ln f(x)$$

Derivando miembro a miembro se tiene:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow F'(x) = F(x)\cdot\left(g'(x)\cdot\ln f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x) = (f(x))^{g(x)}\cdot g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot(f(x))^{g(x)-1}\cdot f'(x)$$

Ejemplo:

Para el caso más sencillo es $F(x) = x^x$, aplicando logaritmos:.

$$\ln F(x) = \ln x^x = x\ln x \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow F'(x) = F(x)\cdot(\ln x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x) = x^x\ln x + x^x.$$

Pequeños retos

1. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(3x^4 - 5x^2 + 2\right)^5$ b) $f(x) = \dfrac{3x}{(4x-1)^2}$ c) $f(x) = \cos(3x) - \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{5}\right)$

2. El lector que tenga dificultad debería repetir cada uno de los ejemplos resueltos anteriormente.

Soluciones:

1. a) $f´(x) = 5\cdot\left(3x^4 - 5x^2 + 2\right)^4 \cdot \left(12x^3 - 10x\right)$. b) $f´(x) = \dfrac{-12x-3}{(4x-1)^3}$.

c) $f´(x) = -3\sin(3x) - \dfrac{1}{10}\cos\left(\dfrac{x}{5}\right)$.