REGLA DE L´HÔPITAL. Casos [1^∞], [0^0] e [∞^0]

Resolución de las formas indeterminadas [1^∞], [0^0] e [∞^0]

Si al calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ aparece alguna de esas formas ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=\left[1^\infty\right]$, o $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\left[0^0\right]$, o $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\left[\infty^0\right]$) se calculará, si se puede, el límite del logaritmo: $\lim\limits_{x\to a}(\ln(f(x)))$.

Con esto, la indeterminación inicial se transforma en otra del tipo [0 · ∞], que se resolverá como se ha indicado oportunamente.

Una vez resuelto, si $\lim\limits_{x\to a}(\ln(f(x)))=L$, se tiene que el límite buscado vale $\lim\limits_{x\to a} f(x)=e^L$.

Recuerda:

1) Los límites cumplen la siguiente propiedad: $\lim\limits_{x\to a}\ln\left[f(x)\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$.

2) Por definición: $\ln A = L \Leftrightarrow A = e^L$; y también: $\ln\left(B^p\right)=p\cdot\ln B$.

Ejemplos: Caso $\left[1^\infty\right]$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]\to$ Aplicando logaritmos: $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\left[\infty\cdot 0\right]=$

$$= \text{(transformando)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-1/x^2}{1+1/x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^1=e\to$ (Este resultado suele tomarse como definición de e).

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}=\left[1^\infty\right]\to$ Aplicando logaritmos.

$$\ln\left(\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}\right)=\lim_{x\to 2^+}\ln\left(\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}\right)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(2-x)^2}\ln\left(\frac{1}{3-x}\right)=\left[\infty\cdot 0\right]=$$

$\to$ (teniendo en cuenta que $\ln\left(\dfrac{1}{3-x}\right)=\ln 1-\ln(3-x)$) $\to = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\ln(3-x)}{(2-x)^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Aplicando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-\ln(3-x)}{(2-x)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2^+}\frac{\dfrac{1}{3-x}}{2(2-x)\cdot(-1)}=\left[\frac{1}{0^+}\right]\to+\infty\Rightarrow\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}=+\infty.$$

c) Para hallar $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}$, aplicando logaritmos se tiene:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\ln(\cos x)^{1/\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\cos x)=\left[\infty\cdot 0\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$$

$\to (L´H) \to = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2\cos^2 x}=\dfrac{-1}{2}$. Por tanto $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}=e^{-1/2}$.

Ejemplos: Caso $\left[0^0\right]$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \left[0^0\right] \to$ Aplicando logaritmos: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = [0\cdot(-\infty)] =$

$$= (\text{transformando}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

b) Para hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} = \left[0^0\right]$ se hace:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left((\sin(x))^{\tan(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\tan(x)\cdot\ln(\sin(x))\right) = [0\cdot\infty] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\dfrac{\cos x}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{-\sin^2 x - \cos^2}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} (-\cos x \sin x) = 0$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin(x))^{\tan(x)} = e^0 = 1$.

Ejemplos: Caso $\left[\infty^0\right]$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2+4\right)^{1/\ln x} = \left[\infty^0\right] \to$ Aplicando logaritmos:

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(x^2+4\right)^{1/\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x}\ln\left(x^2+4\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x^2+4\right)}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x/(x^2+4)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x} = 2.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2+4\right)^{1/\ln x} = e^2$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\tan x} = \left[\infty^0\right]$. Aplicando logaritmos se tiene:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\tan x\cdot\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\ln x}{1/\tan x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= (L'H) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2/x}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin^2 x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4\sin x\cos x}{1} = 0.$$

En consecuencia, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\tan x} = e^0 = 1$.

Pequeños retos

1. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{1/(1-x)}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{4/x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$

2. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

Soluciones:

1. a) *e*. b) e^2. c) e^8. d) *e*.

2. a) 1. b) $e^0 = 1$.