REGLA DE L´HÔPITAL. Casos [0 · ∞] e [∞ – ∞]

Resolución de las formas indeterminadas [0 · ∞] e [∞ – ∞]
Para resolver las indeterminaciones del tipo [0 · ∞] e [∞ – ∞] hay que transformarlas, operando previamente, en alguna de las formas $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Si ese propósito se consigue, entonces se aplica la regla de L´Hôpital.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-2x} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{4e^{2x}} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0$.

→ Puede observarse que $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-2x} = [\infty\cdot\infty] = \infty$.

b) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}\ln x\right)$ = [∞ · 0] = $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L`H) = \lim_{x\to1}\frac{1/x}{1} = 1$.

c) $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x^2}{x+3}\right)\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)\right]$ = [∞ · 0] = $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+5}{x-1}\right)}{\left(\frac{x+3}{x^2}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x-1}}{\frac{-x-6}{x^3}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-6}{(x+5)(x-1)}}{\frac{-x-6}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x^3}{(x+5)(x-1)(-x-6)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-6x^3}{-x^3-10x^2-19x+30} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = ... = 6.$$

d) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ = [∞ – ∞] →(Haciendo la resta indicada) = $\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{(e^x-1)x} = \left[\frac{0}{0}\right]$ = (L´H) =

$$= \lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{e^x x+e^x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to0}\frac{-e^x}{e^x x+2e^x} = -\frac{1}{2}.$$

e) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ = [∞ – ∞] = (Restando) = $\lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$ → Aplicando L´Hôpital

$$\to \lim_{x\to1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right) = \lim_{x\to1}\left(\frac{\ln x}{\ln x+(x-1)/x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pequeños retos

1. Calcula: a) $\lim_{x\to-\infty} e^x(x-2)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(x-2)}{x}$ c) $\lim_{x\to0^+} x\ln x$

2. Calcula: a) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ b) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

Soluciones:

1. a) 0. b) ∞. c) 0. **2**. a) $-\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{2}$.