REGLA DE L´HÔPITAL. Casos [0/0] e [∞/∞]

Indeterminaciones:
En el cálculo de límites pueden aparecer siete expresiones (formas) indeterminadas, que son:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [0\cdot\infty] \quad [\infty-\infty] \quad [1^{\infty}] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

Alguna de estas indeterminaciones pueden resolverse mediante transformaciones algebraicas, pero en general se resuelven aplicando la regla de L´Hôpital.

Regla de L´Hôpital para resolver la indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$

Caso $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, siendo $g(x)\neq 0$ en un entorno de a, si existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, y se cumple que: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

→ Naturalmente las funciones $f(x)$ y $g(x)$ deben ser derivables en un entorno de a.
→ También vale para los límites laterales o en el infinito; esto es: si $x\to a^+$, a^-, $+\infty$ o $-\infty$.

- Resumiendo: "el límite de un cociente del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ es igual al límite del cociente de las derivadas".

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$. Aplicando la regla de L´Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$.

ERROR: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot x-x\cdot\sin x}{x^2}=(?)\to$ OJO: NO se hace la derivada del cociente.

b) La regla también se puede aplicar a funciones racionales. Así, por ejemplo,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]\to(L'H)=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{2x-3}=\frac{1}{-1}=-1$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{2x-1}}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{x}}{(4x\sqrt{x}-1)(2x-1)}=\frac{4}{3}.$$

Observación: La regla de L´Hôpital puede reiterarse. Así, en el ejemplo:

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-2x}-2x}{\sin^2 x}=\left[\frac{1-1-0}{0}=\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2e^{-2x}-2}{2\sin x\cdot\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\text{(se aplica nuevamente L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-4e^{-2x}}{2\cos^2 x-2\sin^2 x}=\frac{-1-4}{2}=-\frac{5}{2}.$$

e) $\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{1-\cos x+x^2}{2x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to (L´H)=\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{\sin x+2x}{4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to (L´H)=\underset{x\to 0}{lím}\dfrac{\cos x+2}{4}=\dfrac{3}{4}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$

Regla de L´Hôpital para resolver la indeterminación $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

En el caso de que $\underset{x\to a}{lím}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ la regla puede formularse como sigue:

Si $\underset{x\to a}{lím}\, f(x)=\infty$ y $\underset{x\to a}{lím}\, g(x)=\infty$, si existe $\underset{x\to a}{lím}\dfrac{f´(x)}{g´(x)}$, entonces también existe $\underset{x\to a}{lím}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y se cumple que $\underset{x\to a}{lím}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\to a}{lím}\dfrac{f´(x)}{g´(x)}$.

$\to$ También vale para los límites laterales o en el infinito; esto es: si $x\to a^+$, a^-, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplos:

a) $\underset{x\to +\infty}{lím}\dfrac{x}{\ln x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Aplicando L´Hôpital: $\underset{x\to +\infty}{lím}\dfrac{x}{\ln x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\underset{x\to +\infty}{lím}\dfrac{1}{1/x}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

b) $\underset{x\to +\infty}{lím}\dfrac{x^2}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\to (L´H)=\underset{x\to +\infty}{lím}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\underset{x\to +\infty}{lím}\dfrac{2}{e^x}=\dfrac{2}{\infty}=0$.

c) También se puede aplicar para funciones racionales:

$$\underset{x\to +\infty}{lím}\dfrac{3x^2-3x+1}{4x^2+5x-2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\to (L´H)=\underset{x\to +\infty}{lím}\dfrac{6x-3}{8x+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\underset{x\to +\infty}{lím}\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}.$$

Pequeños retos

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\tan(3x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2x-e^x+\sin(3x)}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)^2}{e^{x^2}-1}$

2. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+2\ln x}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-30x^2+2x-12}{2x^3-2x^2-2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

Soluciones:

1. a) $\dfrac{1}{2}$. b) $\dfrac{2}{3}$. c) $-\dfrac{1}{2}$. d) 1.

2. a) ∞. b) 0. c) $\dfrac{5}{2}$. d) +∞.