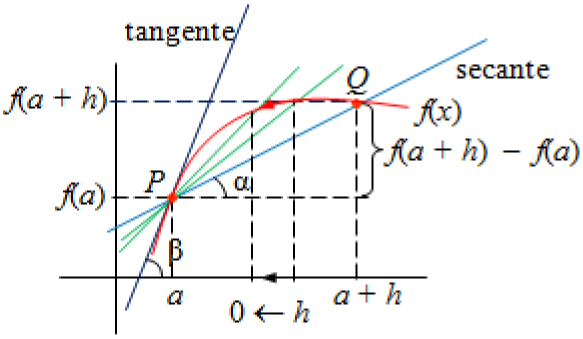
# DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO: DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

**Definición**

Una función $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$ si existe el límite: $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Este límite se denota por $f'(a)$, y existe cuando resulta un número real finito.

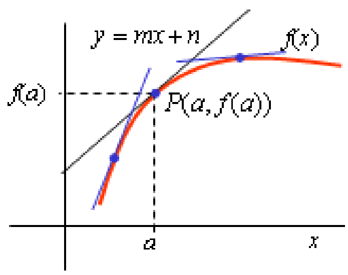



- La derivada es el límite del cociente de dos cantidades infinitesimales. El numerador mide la variación de la variable dependiente (la $f(x)$) cuando la variable dependiente (la $x$) pasa de $a$ a $a + h$.
- El cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mide la tasa de variación media de una variable respecto a la otra en el intervalo $[a,\ a+h]$; ese cociente coincide con el valor de la tangente del ángulo α, tan α, que da la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P$ y $Q$ de la curva de la función $f(x)$: recta secante $PQ$.
- Cuando se impone que la variable independiente varíe una cantidad infinitesimal (eso indica que $h \to 0$), lo que se está calculando es la <u>tasa de variación instantánea de la función</u> $f(x)$ en un punto determinado. Esto es, cómo cambia $f(x)$ cuando cambia $x$ en los alrededores de un punto $a$; por eso, la derivada puede llamarse también tasa de cambio.

**Interpretación geométrica de la derivada**

Cuando $h \to 0$, el punto $Q$ se acerca cada vez más a $P$, y la recta secante pasa cada vez por dos puntos más próximos…, hasta confundirse con la recta tangente a la curva en el punto $P$.
En consecuencia, la derivada, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$. Esto es, en la recta $y = mx + n$ se tiene que $m = f'(a)$; como además la recta pasa por $P(a, f(a))$, se obtiene que la ecuación de dicha recta tangente será:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$




<u>Observaciones</u>:

1. La tangente a una curva en un punto es la recta que mejor aproxima a la curva en ese punto concreto. La derivada indica lo que variaría la función si se comportara linealmente (como la recta tangente) en un entorno de ese punto.
2. La recta tangente es la única recta por la que se podría salir de la curva sin cambiar de dirección, sin cambios bruscos. (En este sentido, la expresión *salirse por la tangente* equivaldría a cambiar una situación embarazosa por otra más cómoda sin que se perciban cambios bruscos).
3. La derivada, como la recta tangente, va cambiando según cambia el punto de referencia.
4. Recuerda que la pendiente de una recta indica lo que la recta aumenta (si es positiva) o disminuye (si es negativa) por cada incremento unitario de la variable $x$.
5. Desde el punto de vista físico: la tasa de variación media es la velocidad media durante un periodo de tiempo determinado; la tasa de variación instantánea, la derivada, es la velocidad en un instante concreto, la que marca el cuentakilómetros en ese momento.

**Ejemplo 1**: Cálculo numérico de una derivada

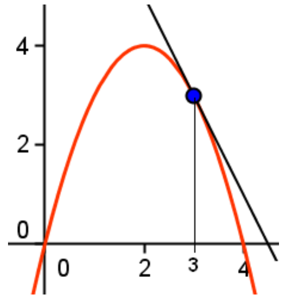
Dada la función $f(x)=-x^2+4x$, su derivada en el punto $x = 3$ es $f´(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

Como $f(3+h)=-(3+h)^2+4(3+h)=-h^2-2h+3$ y $f(3)=3$, se tendrá:

$$f´(3)=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h+3-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-h-2)}{h}=\lim_{h\to 0}(-h-2)=-2.$$

Luego, $f´(3)=-2$. (Este número indica que en el punto $x = 3$, la función está decreciendo en la proporción 2 a 1: la razón que expresa la relación entre ambas variables vale –2.)

**Ejemplo 2**: Recta tangente a una curva




La recta tangente a la curva $f(x)=-x^2+4x$ en el punto de abscisa $x = 3$, será: $y´-f(3)=f´(3)(x-3)$.

Como $f(3)=3$ y $f´(3)=-2$, se obtiene:

$$y-3=-2(x-3)\Rightarrow y=-2x+9.$$

(En la figura adjunta se representan la curva y la recta).

**Ejemplo 3**: Cálculo de la variación del efecto de una anestesia

Admitamos que el efecto de una anestesia $t$ horas después de ser administrada viene dado por la expresión $A(t)=1-\dfrac{t^2}{16}$, (con $t\le 4$); $A(t)=1$ significa que es efecto es pleno, que se da en el instante $t = 0$.

Con esto podemos preguntarnos: a) El cambio medio del efecto durante la primera hora. b) El cambio medio en el intervalo [2, 2 + $h$]; c) La variación del efecto en el instante $t = 2$.

Las respuestas son:

a) El cambio medio durante la primera hora es la tasa de variación media en el intervalo [0, 1], cuyo valor es: $\dfrac{A(1)-A(0)}{1-0}=\dfrac{1-\frac{1}{16}-1}{1}=-\dfrac{1}{16}$, lo que significa que la anestesia disminuye su efecto durante la primera hora a una velocidad media de $\dfrac{1}{16}$ por hora.

b) Igualmente, el cambio medio en el intervalo [2, 2 + $h$] es:

$$\frac{A(2+h)-A(2)}{2+h-2}=\frac{1-\frac{(2+h)^2}{16}-\left(1-\frac{4}{16}\right)}{h}=\frac{-\frac{4h+h^2}{16}}{h}=-\frac{4h+h^2}{16h}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}h$$

Así, por ejemplo, para un incremento de tiempo de 30 minutos, cuando $h = 0,5$ h, desde $t = 2$ y $t = 2,5$, la velocidad media del cambio del efecto de la anestesia es de $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{9}{32}$.

c) La variación instantánea para $t = 2$ es el límite de la expresión anterior, cuando $h\to 0$ (la derivada en el punto $t = 2$), que vale $\lim\limits_{h\to 0}\left(-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16}h\right)=-\dfrac{1}{4}$. Este valor indica que el efecto está disminuyendo a razón de $\dfrac{1}{4}$ por hora.

**Pequeños retos →→**

Utilizando la definición halla, para la función $f(x)=-x^2+4x$, su derivada en el punto $x = 0$.

Halla también la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 0$.

**Soluciones**:
$f´(0) = 4$; $y = 4x$.