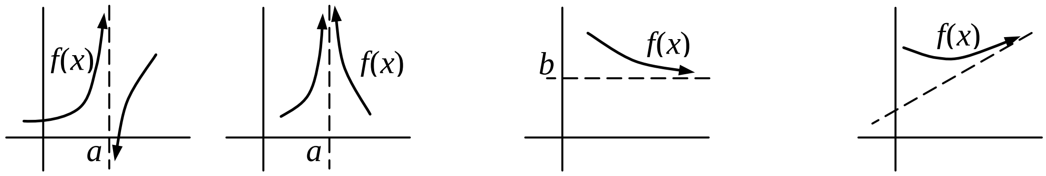
ASÍNTOTAS (VERTICALES Y HORIZONTALES) DE UNA CURVA

Las asíntotas de una curva son rectas hacia las cuales tiende a *pegarse* la gráfica de la función. Pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.



Asíntotas verticales Asíntota horizontal Asíntota oblicua

Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

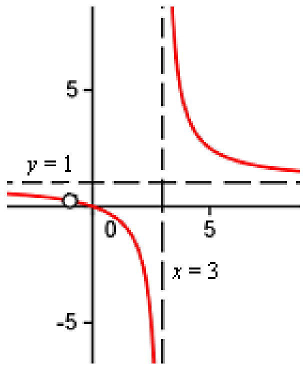
Para estudiarla conviene hacer los límites laterales: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

→ Las funciones racionales, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *pueden* tener asíntotas verticales en las raíces del denominador, en las soluciones de $Q(x) = 0$. Hay que comprobarlo haciendo el límite.

→ Las funciones logarítmicas, $f(x) = \log(g(x))$, tienen asíntotas verticales cuando $g(x) = 0$. (Es posible que por alguno de los lados de esas soluciones la función no esté definida).

Ejemplos:

a) La función $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3}$, que no está definida en los puntos $x = 3$ y $x = -1$, tiene una asíntota vertical en $x = 3$, pero no en $x = -1$.



En efecto:

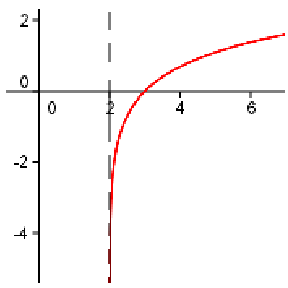
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x}{(x-3)(x+1)} = \left[\frac{12}{0}\right] = \infty \Rightarrow x = 3 \text{ es A.V.}$$

Los límites laterales valen:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 + x}{(x-3)(x+1)} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 + x}{(x-3)(x+1)} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = +\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ En $x = -1$ no hay A.V.

b) La función $f(x) = \ln(x-2)$, que está definida sólo para valores de $x > 2$, tiene a la recta $x = 2$ como asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) = -\infty$.



Observación:

Una forma sencilla de "hacer" los límites laterales es con la calculadora.
Por ejemplo, cuando $x \to 3^-$ puede tomarse $x = 2{,}9$ y ver que $f(2{,}9) = -29$, que es un número "grande" y negativo…, tiende a $-\infty$. Cuando $x \to 3^+$, puede tomarse $x = 3{,}1$ y ver que $f(3{,}1) = +31$, que es un número grande y positivo…, tiende a $+\infty$.
Para $f(x) = \ln(x-2)$, tomando $x = 2{,}000001$ se tiene $f(2{,}000001) = \ln(0{,}000001) = -13{,}82$, que es un número "grande" y negativo…, tiende a $-\infty$.

Asíntotas horizontales

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ cuando $\underset{x\to\infty}{lím} f(x) = b$.

Para estudiarla conviene hacer los límites hacia –∞ y +∞: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

→ Las <u>funciones racionales</u>, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, tienen asíntotas horizontales siempre que el grado del denominador sea igual o mayor que el grado del numerador.

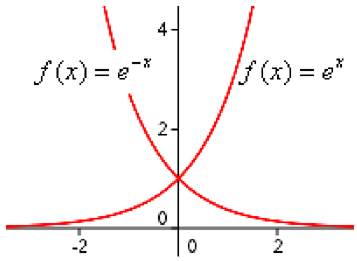
→ Las <u>funciones exponenciales</u>, $f(x) = e^{g(x)}$, tienen asíntotas horizontales cuando $g(x) \to -\infty$.

Ejemplos:

a) La función $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3}$, vista antes, tiene por asíntota horizontal la recta y = 1 pues:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3} = 1$. → Puede verse que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3} = 1^-$, y que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3} = 1^+$.

<u>Observación</u>: Una forma rápida de "hacer" los límites anteriores es con la calculadora.
Por ejemplo, cuando $x \to -\infty$ puede tomarse x = –100 y ver $f(-100) = 0,97$ (algo menos que 1); cuando $x \to +\infty$ puede tomarse x = 100 y ver que $f(100) = 1,03$ (algo más que 1).



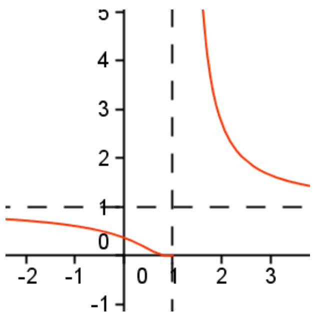
b) La función $f(x) = e^x$ tiene una asíntota horizontal hacia –∞, pues $\underset{x\to-\infty}{lím} e^x = e^{-\infty} = 0$. La asíntota es el eje *OX*.

Igualmente, $f(x) = e^{-x}$ tiene una asíntota horizontal hacia +∞, pues $\underset{x\to+\infty}{lím} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$.

Sus gráficas son las adjuntas.

→ La determinación de las asíntotas de otras funciones exponenciales requiere estudiar el comportamiento del exponente.

Ejemplo:



La función $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$, que no está definida en x = 1 tiene una asíntota vertical en ese punto (por la derecha), pues $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} \right] = +\infty$.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} \right] = 0 \Rightarrow$ No hay asíntota.

También tiene una asíntota horizontal hacia ambos lados del ∞, pues :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{\frac{1}{-\infty}} = e^{0^-} \right] = 1^-$; y $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} \right] = 1^+$.

La asíntota es la recta y = 1.

Pequeños retos

Determina las asíntotas verticales y horizontales de las curvas dadas por: →→→

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$ b) $f(x)=\log(x+1)$ c) $f(x)=e^{-x^2}$ d) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x}}$

Soluciones:
a) x = 3; y = 2. b) x = –1, por la derecha. c) y = 0, por ambos lados. d) x = 0, por la derecha; y = e.
<u>Observación</u>: Comprueba tus resultados trazando sus gráficas. Puede hacerse en Google.
Se adjunta una de ellas.

Gráfico de exp((x+1)/x)