

ASÍNTOTAS OBLICUAS DE UNA CURVA

La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de la curva $y = f(x)$ si:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m, (m \neq 0 \text{ y } m \neq \infty); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = n, (n \neq \infty).$$

Para determinar si la curva va por encima o por debajo de la asíntota hay que hallar el signo del límite de la diferencia: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n)) = 0^{(+,-)}$. Si es 0^+ , la curva va por encima.

→ Las funciones racionales, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, tienen asíntotas oblicuas siempre que el grado del numerador sea igual al grado del denominador más 1: grado $P(x) = 1 +$ grado $Q(x)$. (En estas funciones la asíntota puede hallarse dividiendo).

Ejemplo:

a) La función $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$ tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador supera en 1 al grado del denominador. Si se hace la división se obtiene

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3} = x + \frac{1}{x^3} \Rightarrow \text{que la función se puede escribir como la suma}$$

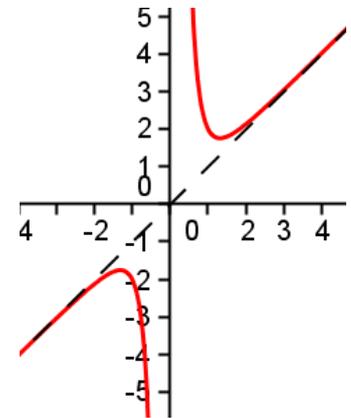
de la recta $y = x$ más otra función, $g(x) = \frac{1}{x^3}$, que toma valores

infinitesimales cuando x se hace muy grande: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$

La asíntota oblicua es la recta $y = x$.

(También tiene una asíntota vertical en $x = 0$).

Su gráfica es la adjunta.



b) La función $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ tiene una asíntota oblicua, pues:

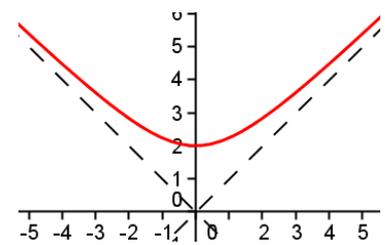
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4 + x^2}{x^2}} = \pm 1$$

Para $m = 1$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4 + x^2} - x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4 + x^2} - x)(\sqrt{4 + x^2} + x)}{\sqrt{4 + x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{4 + x^2} + x} = 0.$$

La asíntota oblicua es $y = x$.

Para $m = -1$ se obtiene $y = -x$.



Pequeños retos

Halla las asíntotas de las curvas dadas por las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{2x - 6}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

Soluciones:

a) $y = x$. b) $x = -1$; $y = x + 2$. c) $x = 3$; $y = x/2 + 3/2$. d) $y = x - 2$; $y = -x + 2$.