SISTEMAS NO LINEALES (2 × 2)

Son aquellos en los que alguna de las ecuaciones que lo forman no es lineal. Aquí se considerarán sólo los sistemas con dos ecuaciones y con dos incógnitas. Por ejemplo, $\begin{cases} y = x^2 + 6 \\ x^2 + 21 = 2y \end{cases}$.

Su solución son los pares de valores (x, y) que cumplen ambas ecuaciones.
Para resolverlos suele emplearse el método de sustitución; aunque vale cualquier otro método.

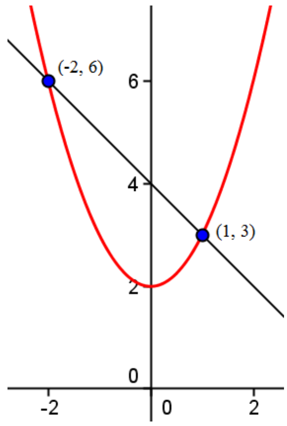
→ Es frecuente la traducción gráfica de estos sistemas como medio para interpretar los resultados. Es más, muchas veces estos sistemas se plantean precisamente porque se desea conocer los puntos de corte de dos curvas dadas.

Ejemplos:

a) El sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - y = -2 \end{cases}$ no es lineal. Para resolverlo puede despejarse y en la primera ecuación y sustituir su valor en la en la segunda.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - x \\ x^2 - y = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - (4 - x) = -2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0.$$

Esta ecuación de 2º grado tiene por soluciones $x = -2$ y $x = 1$.
Para $x = -2 \Rightarrow y = 6$; para $x = 1$, $y = 3$. Pares (1, 3) y (–2, 6).

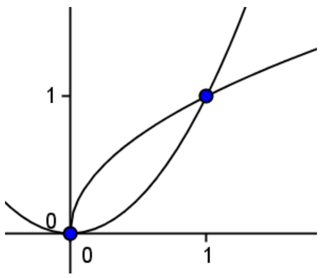


Como la primera ecuación determina una recta y la segunda una parábola, desde el punto de vista geométrico, las soluciones son los puntos de corte de ambas gráficas.

b) Para resolver el sistema: $\begin{cases} y = x^2 + 6 \\ x^2 + 21 = 2y \end{cases}$, como la incógnita y ya está despejada en la 1ª ecuación, sustituyendo en la segunda: $x^2 + 21 = 2(x^2 + 6) \Rightarrow x^2 + 21 = 2x^2 + 12 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
Para ambos valores de x, se tiene que: $y = 9 + 6 = 15$.
Las soluciones son: (–3, 15) y (3, 15). Esos puntos se corresponden con los de corte de las parábolas dadas por cada ecuación.

c) En cambio, para resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 2 = y - 2 \\ y - 2 = (x+1)^2 \end{cases}$, es más conveniente emplear el método de igualación $[y - 2 = y - 2]$, pues de manera inmediata se obtiene $2x + 2 = (x+1)^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = \pm 1$.
Sustituyendo esos valores de x en la primera ecuación, se obtiene: para $x = 1$, $y = 6$; y para $x = -1$, y = 2. Las soluciones del sistema son los puntos (1, 6) y (–1, 2).

d) Como se dijo más arriba, el sistema se obtiene al plantear, por ejemplo: "halla el punto de corte de las parábolas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$".
En este caso se obtiene el sistema $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases}$; equivalente a la ecuación $\sqrt{x} = x^2$, que se resuelve como sigue: $\sqrt{x} = x^2 \Rightarrow$
$x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = 1$.



Para $x = 0$, $y = 0$; para $x = 1$, $y = 0$. Por tanto las curvas se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 1).

Pequeños retos

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y^2=1 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-6x+2y=0 \\ x^2-3x+y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11 \\ xy=2 \end{cases}$

2. Halla los puntos de corte de las gráficas dadas por las ecuaciones:

$y=x^3-15x^2+66x-70$; $y=x^2-13x+50$

Dato: se obtiene una ecuación con raíces enteras; una de ellas es $x = 3$.

Soluciones:

1. a) (–3, –2) y (–3, 2). b) Incompatible. (Puede compararse con el ejemplo resuelto a)).
c) (2, 4) y (–2, –8). d) Da lugar a una ecuación bicuadrada: ±2 y ±1; $\pm\sqrt{3}/2$, $\pm 4/\sqrt{3}$.
2. $x = 3$, $x = 5$ y $x = 8$.