SISTEMAS LINEALES INDETERMINADOS (2 × 2): ¿CÓMO SE RESUELVEN?

• Cuando un sistema tiene infinitas soluciones recibe el nombre de compatible indeterminado (SCI). Las ecuaciones que conforman estos sistemas se repiten: son equivalentes; y sus gráficas se corresponden con dos rectas idénticas.
Algebraicamente, al transformar las igualdades se llegaría a la igualdad 0 = 0, que no aparta nada.

Ejemplo:
El sistema $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ es compatible indeterminado. La segunda ecuación es el doble de la primera: son ecuaciones equivalentes. Por tanto: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \{2x-y=3$, pues la segunda ecuación sobra (es reiterativa).

→ En este caso, las soluciones (que son infinitas) deben darse dependiendo de una de las incógnitas (que pasa a considerarse un parámetro), y reciben el nombre de soluciones o ecuaciones paramétricas.
Aquí resulta más fácil despejar y en función de x, que al revés; se deduce que $y=2x-3$.
Dando valores a x se obtienen las distintas soluciones del sistema; por ejemplo: si $x = 1$, $y = -1$; si $x = 3$, $y = 3$; si $x = -1$, $y = -5$…
Otra alternativa (la recomendada por los matemáticos) consiste en hacer $x = \lambda$ y escribir él conjunto de soluciones así: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda-3 \end{cases}$
→ λ indica cualquier número real. También podría escribirse $x = t$, o cualquier otra letra.

Si se despeja x en función de y, se tendría:

$$x=\frac{3+y}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y \text{; y si se dice que } y=t \text{ (o cualquier otra letra)} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t \\ y=t \end{cases}.$$

Esta solución es aparentemente distinta de la anterior, pero ambas generan los mismos pares de soluciones. (Comprueba que para $y = -1$; 3; –5…, los valores de x son los dados arriba).

Ejemplo de discusión y resolución cuando el sistema resulta compatible indeterminado
El sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases}$ se puede discutir y resolver como sigue:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases} \rightarrow \text{(Restando)} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=2 \\ (m+2)y=0 \end{cases}.$$

Si $m = -2$, la segunda ecuación queda $(-2+2)y=0 \Leftrightarrow 0y=0 \Leftrightarrow 0=0$. Por tanto, para $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado. (Para cualquier otro valor se m, el sistema es CD).

Por tanto, si $m = -2$, el sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ 0=0 \end{cases}$ (SDI) $\Rightarrow x=1+y$.
Para cada valor de y se obtiene un valor de x. Por ejemplo, si $y = 2$, $x = 4$; si $y = -1$, $x = 0$…
En este caso, la solución suele darse en la forma: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \end{cases}$, siendo t cualquier número real: $t \in \mathbf{R}$.

Pequeños retos

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x-2y=2 \\ -2x+4y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -2x+y=-4 \end{cases}$

Si alguno de ellos es indeterminado, da su solución en función de un parámetro.

2. Estudia, en función de *m*, la compatibilidad del sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-my=m \end{cases}$. Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Soluciones:

1. a) $\begin{cases} x=2+2t \\ y=t \end{cases}$. b) $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-4+2\lambda \end{cases}$.

2. SCD si $m \neq -1$; SCI si $m = -1$. $\begin{cases} x=t \\ y=-1-t \end{cases}$.