CLASIFICACIÓN Y DISCUSIÓN DE SISTEMAS LINEALES 2 × 2

• Los sistemas lineales que tienen sólo una solución se llaman compatibles determinados (SCD). Las ecuaciones que conforman estos sistemas son independientes; y sus gráficas se corresponden con dos rectas que se cortan en un punto.
Su resolución no presenta ningún problema algebraico.
• Cuando un sistema no tiene solución recibe el nombre de incompatible (SI); gráficamente, las ecuaciones estarían representadas por dos rectas paralelas.
Algebraicamente, al transformar las igualdades se llegaría a un absurdo; por ejemplo, 3 = 7 o $x = 1/0$.
• Cuando un sistema tiene infinitas soluciones recibe el nombre de compatible indeterminado (SCI). Las ecuaciones que conforman estos sistemas se repiten: son equivalentes; y sus gráficas se corresponden con dos rectas idénticas.
Algebraicamente, al transformar las ecuaciones se legará a la igualdad 0 = 0, que es tan cierta como "inútil".

Ejemplo:
a) El sistema $\begin{cases} x-2y=2 \\ x-2y=0 \end{cases}$ es claramente incompatible: la misma cosa, $x-2y$, no puede ser a la vez igual a 2 y a 0. Es fácil observar que al transformarlo, por ejemplo, así: $\begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} x-2y=2 \\ 0=-2 \end{cases}$, se obtiene una igualdad falsa, que 0 = –2.

b) El sistema $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ es compatible indeterminado. La segunda ecuación es el doble de la primera: son ecuaciones equivalentes.

Discusión de un sistema 2 × 2
El método más fácil y eficaz para discutir sistemas de dos ecuaciones lineales dependientes de un parámetro, *m*, consiste en resolver el sistema en función de *m* (como si *m* fuese un número).
→ Si la solución hallada resulta válida para cualquier valor de *m*, el sistema será compatible determinado.
→ Si hay algún valor de *m* que invalida la solución, para ese valor de *m* el sistema será incompatible. Sucede esto cuando un denominador (dependiente de *m*) se anula. También cuando resulta una igualdad absurda, del tipo 0 = 3.
→ Si al transformar el sistema inicial aparece una ecuación repetida (desaparece una ecuación o se obtiene la igualdad 0 = 0), el sistema será compatible indeterminado. En este caso, una incógnita debe darse dependiendo de la otra.

Ejemplos:
a) El sistema $\begin{cases} x-2y=m \\ x+my=0 \end{cases}$ se puede resolver (por sustitución, despejando *x* en *E*1) como sigue:

$$\begin{cases} x-2y=m \\ x+my=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m+2y \\ x+my=-m \end{cases} \Rightarrow m+2y+my=0 \Rightarrow (2+m)y=-m \Rightarrow y=-\frac{m}{m+2}$$

El resultado es válido y único siempre que $m \neq -2$ (SCD), por ejemplo, si $m = 1$, $y = -1/3$;
pero es absurdo cuando $m = -2$ (SCI), pues para ese valor el denominador de la solución vale 0.

b) El sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ mx - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \ \end{matrix}\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ mx - 2y = 4 \end{cases} \to$ (Restando) $\Rightarrow \begin{matrix} \ \\ E2 - E1 \end{matrix}\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ (m-4)x = -2 \end{cases} \to$

(despejando x) $\Rightarrow$ $x = \dfrac{-2}{m-4}$, que tiene sentido siempre que $m \neq 4$, SCD.

Por tanto: cuando $m = 4$, el sistema será incompatible.

c) El sistema $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + my = 0 \end{cases}$ se puede resolver, por sustitución (despejando y en $E1$), como sigue:

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + my = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 + mx \\ x + my = 0 \end{cases} \to \text{(sustituyendo en } E2) \Rightarrow x + m(1 + mx) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + m + m^2x = 0 \Rightarrow x\left(1 + m^2\right) = -m \Rightarrow x = -\frac{m}{1 + m^2}$$

Como el denominador no se anula para ningún valor de m, el sistema será siempre CD.

d) El sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$ se puede resolver, por reducción, como sigue:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + my = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \ \end{matrix}\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ 2x + my = 2 \end{cases} \to \text{(Restando)} \Rightarrow \begin{matrix} \ \\ E2 - E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ (m+2)y = 0 \end{cases}.$$

Si $m = -2$, la segunda ecuación queda $(-2+2)y = 0 \Leftrightarrow 0y = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$. Por tanto, para $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado. Para cualquier otro valor se m, el sistema será CD.

Pequeños retos

1. Resuelve y clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 7x - y = -8 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - 3 = 2y + 2 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ -2x + 4y = -4 \end{cases}$

Si alguno de ellos es indeterminado, da su solución en función de un parámetro.

2. Estudia, en función de m, la compatibilidad de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - my = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x - my = m \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + my = -m \\ mx - y = 1 \end{cases}$

Soluciones:

1. a) SCD: $x = -1$; $y = 1$. b) Incompatible. c) SCI: $x = 2 + 2t; y = t$.

2. a) SCD si $m \neq -1$; incompatible si $m = -1$. b) SCD si $m \neq -1$; SCI si $m = -1$. c) SCD para todo m.