## INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA 2 × 2

La interpretación geométrica de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas se basa en las siguientes observaciones:

**1)** Cada ecuación con dos incógnitas es una igualdad en la que intervienen dos variables, que genéricamente se designan por $x$ e $y$. Puede ser de cualquier grado y suele tener infinitas soluciones, que son pares de valores (uno para $x$ y otro para $y$) que cumplen la igualdad. Esas soluciones pueden encontrarse expresando una incógnita en función de la otra: despejando.

**Ejemplos**:
Son ecuaciones con dos incógnitas cada una de las siguientes igualdades:

$x + y = 5 \qquad x \cdot y = 4 \qquad x^2 - y = -3 \qquad x^2 + y^2 = 17$

La primera es una ecuación de primer grado; las otras tres son de segundo grado.
Todas las ecuaciones anteriores tiene por solución $x = 1$ e $y = 4$ (compruébese); pero cada una de ellas tiene infinitas soluciones más, que se pueden hallar despejando $x$ o $y$ en cada una de ellas. En los ejemplos anteriores despejando $y$ en cada caso, queda:

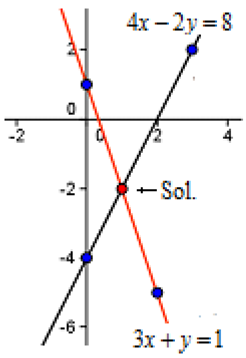
$$y = 5 - x \qquad y = \frac{4}{x} \qquad y = x^2 + 3 \qquad y = \sqrt{17 - x^2}$$

**2)** En las ecuaciones anteriores, dando valores a $x$ se encuentran los de $y$. Así se obtienen los pares de soluciones. Por ejemplo: (–1, 6) y (3, 2) son soluciones de la primera de ellas; (–4, –1) y (2, 2) son soluciones de la segunda; (2, 7) y (0, 3), de la tercera; y (1, 4) y (4, 1), de la cuarta.

**3)** Para una misma ecuación, los pares de soluciones son puntos del plano cartesiano que dan lugar a una línea, recta o curva. En el caso de las ecuaciones de primer grado esas líneas son rectas.

**4)** Si se tienen dos ecuaciones (un sistema), se tendrán dos gráficas (dos rectas si el sistema es lineal). Así, desde el punto de vista geométrico, la solución de un sistema es el punto o los puntos de corte de las líneas asociadas a sus respectivas ecuaciones.

**Ejemplo**:
a) Si se considera la ecuación $4x - 2y = 8 \Leftrightarrow y = 2x - 4$, los pares (0, –4) y (3, 2) son soluciones. Son puntos de una recta.




b) La ecuación $3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 3x$, tiene por soluciones (1, 0) y (2, –5); también puntos de otra recta.

c) Las dos ecuaciones anteriores determinan el sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$.

Su solución es $x = 1$ e $y = -2$, que son las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

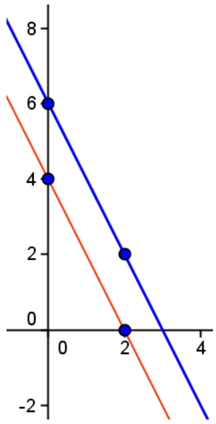
→ En el caso de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, se cumple:
- Si las rectas fuesen paralelas, el sistema no tendrían solución: sería incompatible.
- Si las rectas fuesen coincidentes, el sistema tendría infinitas soluciones: sería compatible indeterminado.

**Ejemplo**:

En el sistema $\begin{cases} 4x+2y=8 \\ 2x+y=6 \end{cases}$, si se multiplica la segunda ecuación por 2, queda:

$\begin{cases} 4x+2y=8 \\ 4x+2y=12 \end{cases}$. Restando ambas ecuaciones se obtiene 0 = −4, que naturalmente es absurdo. Esto significa que el sistema es incompatible.

Gráficamente, las ecuaciones se corresponden con las rectas paralelas de la figura adjunta.




Para representar la recta $4x+2y=8$ puede despejarse *y*: $y=-2x+4$, que pasa por los puntos (0, 4) y (2, 0).

Igualmente, la recta $2x+y=6 \Leftrightarrow y=-2x+6$.

Se representa dando dos de sus puntos: (0, 6) y (2, 2).

**Pequeños retos**

Comprueba, analítica y gráficamente, la naturaleza de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x+y=4 \\ x-y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=4 \\ -2x+4y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+2y=2 \\ 2x-4y=-4 \end{cases}$

**Soluciones:**

a) Las rectas se cortan en el punto (2, –4); *x* = 2; *y* = –4. b) Rectas paralelas. Sistema incompatible.
c) Compatible indeterminado; las rectas coinciden.