PROPIEDADES DE POTENCIAS Y RAÍCES

Definición:

$a \cdot a \cdot \ldots\ldots a = a^n$, $n \in \mathbf{N}$. **Ejemplo**: $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3 = -8$.

Por convenio: $a^0 = 1$, si $a \neq 0$. **Ejemplo**: $5^0 = 1$; $(-3)^0 = 0$; $(0{,}2)^0 = 1$.

- El signo del resultado depende del signo de la base y de la paridad del exponente (par o impar), cumpliéndose:

$(+a)^n = +a^n = a^n \to$ siempre positivo

$(-a)^n = +a^n = a^n$, positivo si n es par; $(-a)^n = -a^n$, negativo si n es impar

Potenciación de exponente entero (negativo)

Por convenio: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. **Ejemplo**: $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$.

Propiedades de las potencias

Las propiedades principales de las potencias son:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

En todos los casos n y m son números enteros.

Raíz cuadrada: $\sqrt{a} = b$, $a > 0 \Leftrightarrow b^2 = a$.

Raíz cúbica: $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$.

Raíz de índice *n* (raíz *n*-ésima): $\sqrt[n]{a} = b$, $n \in \mathbf{N} \Leftrightarrow b^n = a$.

Potencia de exponente racional

- La raíz de índice n puede expresarse como una potencia de exponente racional: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.
- En particular, $a^{1/2} = \sqrt{a}$ y $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$.
- En general, si $\dfrac{n}{m}$ es una fracción, se define $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$.

Propiedades

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (a \cdot b)^{1/n} = \sqrt[n]{a \cdot b}$. En particular, para raíces cuadradas: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$. En particular: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. En particular, para raíces cuadradas: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

- Introducción de factores: $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$; $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

Para introducir un factor se eleva al índice de la raíz.

- Extracción de factores: Si $N = A \cdot b \Rightarrow \sqrt{N} = \sqrt{A \cdot b} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{b} = a \cdot \sqrt{b}$, supuesto que $\sqrt{A} = a$.

En general: $\sqrt[n]{Ab} = \sqrt[n]{A} \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b}$, supuesto que $\sqrt[n]{A} = a$.