PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una sucesión de números es una progresión geométrica cuando cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, llamado razón de la progresión. Por tanto, en una progresión geométrica, el cociente entre dos términos consecutivos siempre es igual a la razón. En consecuencia, una progresión geométrica queda determinada dando cualquier término y la razón. Si el primer término de una progresión geométrica es a_1 y la razón es r, la progresión será:

$$a_1 \quad a_2 = a_1 r \quad a_3 = a_2 r \quad a_4 = a_3 r \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} r$$

$$a_2 = a_1 r \quad a_3 = a_1 r^2 \quad a_4 = a_1 r^3 \quad \dots \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

Término general de una progresión geométrica

El término general de la progresión geométrica viene dado por la fórmula: $a_n = a_1 r^{n-1}$

Ejemplo:

La sucesión 1, 2, 4, 16, 32, ... es una progresión geométrica de razón $r = 2$.

Su término general será: $a_n = 1{\cdot}2^{n-1} = 2^{n-1}$.

Con esto, por ejemplo: $a_{10} = 2^9 = 512$; $a_{45} = 2^{44} = 17592186044416$.

Suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica

La fórmula que da la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica de primer término a_1 y razón r, $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$, es:

$$S = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

Ejemplo:

La suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 2, 4, 8, ... es $S = \frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1} = 1023$.

Suma de infinitos términos consecutivos duna progresión geométrica cuando $|r| < 1$

Si la razón, r, es menor que 1 en valor absoluto (esto es, $|r| < 1$), puede hacerse la suma de infinitos términos consecutivos. Dicha suma vale: $S = \frac{a_1(-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$,

Observación:

Si $|r| < 1$, cuando n tiende a infinito, el valor de r^n tiende a 0. Por ejemplo, si $r = 0{,}8$, para $n = 20$ se tiene $r^{20} = 0{,}8^{20} \approx 0{,}01$; y si $n = 60$, $0{,}8^{60} \approx 0{,}0000015$, cantidad cada vez más insignificante.

En consecuencia, $S = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \to S = \frac{a_1}{1-r}$,

Ejemplo:

La suma 100 + 50 + 25 + 12,5 + ... (infinitos términos, con $r = 1/2$) vale: $S = \frac{100}{1-1/2} = 200$.

Producto de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica

Para una progresión geométrica de primer término a_1 y razón *r*, el valor del producto de sus *n* primeros términos, $P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ es

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Ejemplos:

a) El producto de los 10 primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 36,... es:

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_{10})^{10}} = \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^9)^{10}} = \sqrt{3^{20} \cdot 2^{90}} = 3^{10} \cdot 2^{45} \text{ (Obsérvese que } a_{10} = 3 \cdot 2^9 \text{.)}$$

b) El producto de los 18 primeros términos de la progresión geométrica 256, 128, 64,... es:

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_{16})^{16}} = \sqrt{(256 \cdot 256 \cdot 2^{-15})^{16}} = \sqrt{(2)^{14}} = 2^7$$

Pequeños retos

1. Comprueba que las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y determina la expresión que da su término general:

a) $5, \frac{15}{2}, \frac{45}{4}, \frac{135}{8}, ...$ b) $+1, -1, +1, -1 ...$

2. Halla el valor de las siguientes sumas:

a) $(1,01) + (1,01)^2 + (1,01)^3 + (1,01)^4 + (1,01)^5 + (1,01)^6$.

b) 7 + 7/3 + 7/9 + 7/27 + … (infinitos términos).

Soluciones:

1. a) $r = \frac{3}{2}$; $a_n = 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. b) $r = -1$; $+a_n = (-1)^{n-1}$

2. a) 6,213535. b) 10,5.