

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una sucesión de números se dice que es una progresión aritmética cuando cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo, llamado diferencia de la progresión. Por tanto, en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma. En consecuencia, una progresión aritmética queda determinada dando cualquier término y la diferencia. En general, si el primer término es a_1 y la diferencia d , la progresión aritmética es:

$$\begin{aligned} a_1 \quad a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_2 + d \quad a_4 = a_3 + d \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} + d \\ a_2 = a_1 + d \quad a_3 = a_1 + 2d \quad a_4 = a_1 + 3d \quad \dots \quad a_n = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Término general de una progresión aritmética

El término general de una progresión aritmética viene dado por la fórmula: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Aplicando esta fórmula se puede hallar el valor de cualquier término de la progresión.

Ejemplos:

a) La sucesión 4, 7, 10, 13, ... es una progresión aritmética de diferencia 3. Su término general es

$$a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 4 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n + 1.$$

El término número 200 vale: $a_{200} = 3 \cdot 200 + 1 = 601$.

b) La sucesión 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5, ... es una progresión aritmética de diferencia $d = 0,5$.

Su término general es: $a_n = 1,5 + (n-1) \cdot 0,5 \Leftrightarrow a_n = 1 + 0,5n$.

Con esto, por ejemplo: $a_{35} = 1 + 0,5 \cdot 35 = 18,5$; $a_{100} = 1 + 0,5 \cdot 100 = 51$

Suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética

La fórmula que da la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n, \text{ es: } S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Ejemplo:

La progresión 1, 7, 13, 19, ... es aritmética de diferencia 6. La suma de sus 200 primeros términos,

$$S = 1 + 7 + 13 + \dots + a_{200}, \text{ vale } S = \frac{(a_1 + a_{200}) \cdot 200}{2}.$$

Como $a_1 = 1$ y $a_{200} = 1 + 199 \cdot 6 = 1195$, se obtiene: $S = \frac{(1+1195) \cdot 200}{2} = 119600$.

Pequeños retos

1. Halla la expresión del término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 4, 4,3, 4,6, 4,9...

b) 100, 98, 96, ...

2. Halla el resultado de las siguientes sumas:

a) $3 + 7 + 11 + \dots$ (150 términos)

b) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$ (1000 términos)

Soluciones:

1. a) $a_n = 0,3n + 3,7$. b) $a_n = 102 - 2n$.

2. a) 45150. b) 1000000.