FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS: ESQUEMA A SEGUIR

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de sus factores irreducibles, los de menor grado posible: análogo al concepto de factores primos para los números.

- Un factor polinómico es irreducible si es de primer grado o no tiene ninguna raíz real.

Por ejemplo x^2+1 es irreducible; también es irreducible $x + 3$.

- Todos los factores de primer grado son irreducibles, en particular los de la forma $x-a$; pero también los del tipo $ax+b$.
- Hay factores irreducibles de cualquier grado.
- Un polinomio de grado n tiene un máximo de n factores irreducibles.

Ejemplo:
El polinomio $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ se puede escribir como producto de $(x-2)\cdot\left(x^2-2x-3\right)$. El primer factor es irreducible, pero el segundo, no, pues $\left(x^2-2x-3\right)$ = $(x+1)\cdot(x-3)$.
Por tanto, la factorización de $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ será: $P(x)=(x-2)(x+1)(x-3)$.

Esquema para factorizar un polinomio
Hay que saber sacar factor común, resolver ecuaciones sencillas y conocer el teorema del factor
Puede seguirse el siguiente proceso:
1) Si puede sacarse factor común x, se saca.
2) Hay que encontrar una de sus raíces. (Para polinomios de segundo grado se encuentran resolviendo la ecuación $P(x)=0$: Si el polinomio es de grado mayor o igual a 3, buscando raíces enteras entre los divisores del término independiente).
3) Cuando se conozca alguna raíz, se divide por Ruffini para obtener factores de menor grado, y, por tanto, más cómodos de manejar: Si $x = a$ es una raíz de $P(x) \to$ se divide por $(x - a)$ y se escribe $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$.
4) A continuación, se repite el mismo proceso con $P_1(x)$.

Ejemplos:
a) Para $P(x)=x^3-9x$, se puede sacar factor común x (x = 0 es una raíz). En consecuencia,

$$P(x)=x^3-9x=x(x^2-9)$$

Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2-9=0 \Rightarrow x=-3; x=3$.
Por tanto, $P(x)=x^3-9x=x(x^2-9)=x(x+3)(x-3)$

b) Para $P(x)=x^3+9x$, también se tiene que $P(x)=x^3+9x=x(x^2+9)$. Pero, como en este caso, la ecuación $x^2+9=0$ no tiene soluciones reales, no es posible hacer una descomponiendo más simple.

c) Para $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6$ hay que encontrar alguna raíz entera. Se busca entre los divisores de 6: 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6 y –6.
Vale $x = 1$, pues $P(1) = 0 \Rightarrow$ $(x – 1)$ es un factor $\Rightarrow$ $P(x)$ es divisible por $(x – 1)$. Se divide por Ruffini y se obtiene:

$$P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=(x-1)(2x^2-8x+6)$$

En el segundo factor se puede sacar factor común 2, luego $P(x)=2(x-1)(x^2-4x+3)$.
Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2-4x+3=0$. Sus soluciones son $x = 1$ y $x = 3$ $\Rightarrow$ $(x-1)$ y $(x – 3)$ son los factores.

En consecuencia: $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=2(x-1)(x-1)(x-3)=2(x-1)^2(x-3)$.
En este caso, la solución $x = 1$ es doble, pues el factor $(x - 1)$ se repite dos veces.

Pequeños retos

Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^2-6x+5$ b) $P(x)=x^3-10x^2$ c) $P(x)=2x^3-8x$

d) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ e) $P(x)=(x^2+2x)(x^2-5x+4)$ f) $P(x)=x^3+2x^2+2x+4$

Soluciones:

a) $(x-1)(x-5)$. b) $x^2(x-10)$. c) $2x(x-2)(x+2)$.

d) $(x+1)(x-2)(x-3)$. e) $x(x+2)(x-1)(x-4)$. f) $(x+2)(x^2+2)$