TEOREMAS DEL RESTO Y DEL FACTOR

Estos teoremas se aplican para descomponer un polinomio en factores más sencillos. En sus enunciados interviene dos conceptos: 1) valor numérico de un polinomio; 2) raíz de un polinomio.

Valor numérico de un polinomio, para un valor de $x = a$, es el número que resulta cuando en él se sustituye x por a. Si el polinomio es $P(x)$ ese valor se denota por $P(a)$.

Ejemplo:
El valor numérico de $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x + 6$ para $x = -1$ es:

$$P(-1) = (-1)^4 - 4\cdot(-1)^3 + 5\cdot(-1) + 6 = 1 + 4 - 5 + 6 = 6.$$

Análogamente, $P(2) = 2^4 - 4\cdot 2^3 + 5\cdot 2 + 6 = 16 - 32 + 10 + 6 = 0$.

Raíz de un polinomio
Raíz de un polinomio es cada uno de los valores de $x = a$ para los que $P(a) = 0$. En este caso se dice que a es una raíz o un cero de $P(x)$.

- Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Ejemplos:
a) Para el polinomio del ejemplo anterior, $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x + 6$, una de sus raíces es $x = 2$, pues $P(2) = 0$. (Para el mismo polinomio, $x = -1$ no es raíz.)
b) $x = -2$ es una raíz de $P(x) = 2x^3 - 5x + 6$, pues $P(-2) = 2\cdot(-2)^3 - 5\cdot(-2) + 6 = 0$.
c) Las raíces de $P(x) = x^2 - 5x - 6$ son las soluciones de $x^2 - 5x - 6 = 0$, que son $x = 1$ y $x = 6$.

- Para polinomios de grado mayor que 2 se conoce el siguiente criterio: Si un polinomio con coeficientes enteros tiene raíces enteras estas deben ser divisores del término independiente. Por ejemplo, para $P(x) = 2x^3 - 5x + 6$, como el término independiente vale 6 sus posibles raíces enteras hay que buscarlas entre los divisores de 6, que son 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6 y –6.
Hay que probar con paciencia.
Para $x = 1$, $P(1) = 3 \Rightarrow x = 1$ no es raíz. Para $x = -2$, $P(-2) = 0 \Rightarrow x = -2$ SÍ es raíz...
Si se continúa probando se verá que este polinomio no tiene más raíces enteras.
- Un polinomio puede tener la misma raíz varias veces, pudiéndose hablar de raíz doble, triple…

Teorema del resto
El resto de la división de $P(x):(x-a)$ es igual al valor numérico de $P(x)$ para $x = a$.
Esto permite saber el resto de la división sin necesidad de hacerla, pues $r = P(a)$.

Ejemplos:
a) En la división de $D(x) = 6x^4 - 19x^3 + 25x - 8$ entre $d(x) = x - 2$ vale –14 (Puede verse dividiendo por Ruffini). Sustituyendo: $D(2) = 6\cdot 16 - 19\cdot 8 + 25\cdot 2 - 8 = -14$. Efectivamente coinciden.
b) En la división de $P(x) = x^3 + 3x$ entre $x + 1$ el resto vale –4 (comprobar); como puede verse $P(1) = 1 + 3\cdot 1 = 4$. También coinciden.
c) El resto de la división de $P(x) = 2x^3 - 5x + 6$ entre $x - 1$, vale $P(1) = 3$; entre $x + 1$ vale $P(-1) = 9$; entre $x - 2$, vale $P(2) = 12$; entre $x + 2$, vale $P(-2) = 0 \Rightarrow x = -2$ es raíz de $P(x)$.

Teorema del factor
El concepto de factor es el mismo que el de divisor. Así, el número 14 puede escribirse como 2 · 7; los números 2 y 7 son factores de 14. El número 24 tiene más factores, pues 24 = 2 · 12 = 3 · 8 = 2 · 3 · 4 = 2 · 2 · 2 · 3. Los números 2, 3, 4, 6, 8 y 12 son factores de 24 porque la división de 24 entre cualquiera de ellos es exacta. Es evidente que conocido un factor, dividiendo se obtiene el otro; así, como 24 : 2 = 12 se puede escribir que 24 = 2 · 12. Y lo mismo para los demás factores.
Igualmente el polinomio (del ejemplo anterior) $P(x)=2x^3-5x+6$ puede escribirse como $(x+2)\cdot(2x^2-4x+3)$; los polinomios $(x+2)$ y $(2x^2-4x+3)$ son los factores; y son factores porque al dividir $P(x)$ entre cada uno de ellos la división es exacta. También, como en el caso numérico, debe resultar evidente que conociendo un factor, por ejemplo $(x+2)$, dividiendo se obtiene el otro, que será el cociente de la división $P(x):(x+2)$.

- Para la determinación de los factores de un número se recurría a los criterios de divisibilidad; así no era necesario dividir un número para hallar alguno de sus factores.
- Para la determinación de los factores de un polinomio se recurre al teorema del factor, que dice: "La condición necesaria y suficiente para que $(x-a)$ sea un factor del polinomio $P(x)$ es que $P(a)=0$". O lo que es lo mismo:

$$(x-a) \text{ es un factor del polinomio } P(x) \Leftrightarrow x=a \text{ es una raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(a)=0.$$

Por tanto, por cada raíz que se conozca se tiene un factor. Así, por ejemplo, si 2, 3 y –5 son raíces de un polinomio de tercer grado, entonces $x-2$, $x-3$ y $x+5$ son sus factores. Luego, dicho polinomio puede ser $P(x)=(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+5)$; y no sería necesario escribirlo por extensión, aunque, si se desea, multiplicando se obtiene: $P(x)=x^3-19x+30$.

Ejemplo:
Las raíces de $P(x)=x^3-9x$ son $x=-3$, $x=0$ y $x=3$ (compruébese); entonces dicho polinomio puede escribirse como $P(x)=x(x-3)(x+3)$.

<u>Observaciones</u>:
1) Si se conoce que x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $P(x)$, entonces el polinomio es de la forma $P(x)=c\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)$, donde c es una constante.

Ejemplo:
Un polinomio de tercer grado cuyas raíces son $x=-1$, $x=2$ y $x=3$ es: $P(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$; en este caso se ha hecho $c=1$.
Si $c=-5$, el polinomio es $P(x)=-5(x+1)(x-2)(x-3)$. (El valor que deba tomar c dependerá de las condiciones del problema. Por defecto se toma $c=1$).

2) Si un polinomio tiene raíces repetidas, el factor correspondiente se repetirá las mismas veces. Así, por ejemplo, si las raíces de un polinomio son $x=1$, doble, y $x=-2$, el polinomio se escribirá como $P(x)=(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)=(x-1)^2\cdot(x+2)$.

3) Si un polinomio viene dado como producto de otros polinomios, sus raíces son las raíces de cada uno de los polinomios multiplicados. Así, por ejemplo, las raíces de $P(x)=(x^2+2x)(x^2-5x+4)$ son las raíces de x^2+2x y las de x^2-5x+4.

4) Si un polinomio viene dado como producto de otros polinomios, salvo indicación expresa, se dejará como está: no se multiplicará, pues se trabaja mejor con sus factores.

Pequeños retos

1. Aplicando el teorema del factor, comprueba:

a) que $x + 1$, $x – 2$ y $x – 3$ son factores de $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

b) que $x + 2$ no factor del polinomio anterior.

2. Halla probando entre los divisores del término independiente alguna raíz de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ b) $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ c) $R(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Solución:

2. a) $x = 1$. b) $x = 1$, $x = –2$ y $x = 2$. c) $x = –1$, $x = 1$.