

POLINOMIOS: OPERACIONES (SUMA, RESTA Y MULTIPLICACIÓN)

Con los polinomios pueden realizarse las operaciones usuales. Estas operaciones verifican las propiedades acostumbradas: asociativa, conmutativa, distributiva... Aunque los mecanismos para operar son fáciles, son muy frecuentes los errores de cálculo, por lo es recomendable repasar los resultados.

Suma y resta de polinomios

Para sumar polinomios se agrupan, sumando o restando, los términos semejantes.

Ejemplo:

a) La suma $2x^2 - 7x^2 + 3x^2 = -2x^2$.

b) La suma $2x^5 + 4x^3$ no puede realizarse; debe dejarse así. Lo más que puede hacerse es sacar factor común: $2x^5 + 4x^3 = 2x^3(x^2 + 2)$.

c) $(4x^3 + 5x - 6) - (3x^3 - 2x^2 + 7x) + (6x^3 + 4x^2 - x + 5) = \rightarrow$ se quitan paréntesis
 $= 4x^3 + 5x - 6 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 6x^3 + 4x^2 - x + 5 = \rightarrow$ se agrupan términos semejantes
 $= (4 - 3 + 6)x^3 + (-2 + 4)x^2 + (5 - 7 - 1)x + (-6 + 5) = 7x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

Multipliación de polinomios

Se utilizan la propiedad distributiva del producto y las propiedades de la potenciación.

Ejemplos:

a) Número por polinomio:

$$3 \cdot (4x^2 + 5x - 6) = 12x^2 + 15x - 18.$$

b) Número negativo por polinomio:

$$\begin{aligned} -1 \cdot (3x^3 - 2x^2 + 7x) &= -(3x^3 - 2x^2 + 7x) = -3x^3 + 2x^2 - 7x. \\ -4 \cdot (5x^2 - 3x - 2) &= -20x^2 + 12x^2 + 8. \end{aligned}$$

Recuérdese que un signo $-$ delante de un paréntesis cambia el signo de todos los términos que incluye el paréntesis.

c) Monomio por polinomio:

$$4x^2 \cdot (3x^3 - 2x + 7) = (4x^2 \cdot 3x^3) + (4x^2 \cdot (-2x)) + (4x^2 \cdot 7) = 12x^5 - 8x^3 + 28x^2.$$

d) Polinomio por polinomio:

$$\begin{aligned} (5x - 6)(2x^2 - 3x + 1) &= (5x)(2x^2 - 3x + 1) - 6(2x^2 - 3x + 1) = \\ &= (5x \cdot 2x^2) + (5x \cdot (-3x)) + (5x \cdot 1) - (6 \cdot 2x^2) - (6 \cdot (-3x)) - (6 \cdot 1) = \\ &= 10x^3 - 15x^2 + 5x - 12x^2 + 18x - 6 = 10x^3 - 27x^2 + 23x - 6 \end{aligned}$$

e) $(4x^3 + 5x - 6)(-2x^2 + 7x) =$

$$\begin{aligned} &= (4x^3 \cdot (-2x^2)) + (4x^3 \cdot 7x) + (5x \cdot (-2x^2)) + (5x \cdot 7x) - (6 \cdot (-2x^2)) - (6 \cdot 7x) = \\ &= -8x^5 + 28x^4 - 10x^3 + 35x^2 + 12x^2 - 42x = -8x^5 + 28x^4 - 10x^3 + 47x^2 - 42x \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta las reglas de los signos, tanto al multiplicar como al agrupar.

Productos notables

Son productos que aparecen con relativa frecuencia. Conocerlas de memoria agiliza los cálculos.

$$(a+b)^2 \quad (a-b)^2 \quad (a+b)(a-b)$$

En todos los casos, multiplicando como dos polinomios se tendrá:

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \cdot (a-b) - b \cdot (a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a+b)(a-b) = a \cdot (a-b) + b \cdot (a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

En definitiva:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

- a) $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$.
- b) $(x^2+3)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3 + 3^2 = x^4 + 6x^2 + 9$.
- c) $(4x-1)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2 = 16x^2 - 8x + 1$.
- d) $(5-2x^2)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2x^2 + (2x^2)^2 = 25 - 20x^2 + 4x^4$.
- e) $(4x+3)(4x-3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$.
- f) $(2+x^2)(2-x^2) = 2^2 - (x^2)^2 = 4 - x^4$.

Pequeños retos

1. Halla las siguientes sumas y restas de polinomios:

$$\text{a) } (3x^2 - 3x + 4) - 2(4x - 5) \quad \text{b) } (x^3 - 5x^2 + 2) - 2(-x^3 - 2x + 3) + 3(-x^3 + 2)$$

2. Halla:

$$\text{a) } (2x^2 + 5x - 6) \cdot (3x^2 - 2x + 3) \quad \text{b) } \left(\frac{2}{3}x^2 - 3x\right) \cdot \left(-2x^2 + \frac{3}{4}\right)$$

3. Aplicando las fórmulas de los productos notables, calcula:

$$\text{a) } (3x+5)^2 \quad \text{b) } (4x-1)^2 \quad \text{c) } (4x+3)(4x-3)$$

Soluciones:

1. a) $3x^2 - 11x + 14$. b) $-5x^2 + 4x + 2$.
2. a) $6x^4 + 11x^3 - 22x^2 + 27x - 18$. b) $-\frac{4}{5}x^4 + 6x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$.
3. a) $9x^2 + 30x + 25$. b) $16x^2 - 8x + 1$. c) $16x^2 - 9$