OPERACIONES CON RADICALES

Al ser los radicales potencias de exponente fraccionario, para operar con ellos deben tenerse en cuenta las propiedades de la potenciación. En general, las sumas de radicales son complicadas, salvo que los radicales sean equivalentes; mientras que los productos pueden resultar más sencillos.

Ejemplos:
a) Las siguientes operaciones no pueden simplificarse:

1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $3-\sqrt{5}$;

b) Las siguientes operaciones pueden simplificarse como sigue:

1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$; 3) $\left(15\sqrt{3}\right):\left(5\sqrt{3}\right)=\dfrac{15\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=\dfrac{15}{5}=3$.

Producto de radicales

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(a\cdot b)^{1/n}=\sqrt[n]{a\cdot b}.$$

En particular, para raíces cuadradas: $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Ejemplos:
a) $\sqrt{36\cdot 81}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{81}=6\cdot 9=54$. Se hace la raíz de cada factor y después el producto.
b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 27}=\sqrt{81}=9$. Se hace el producto de los radicandos y después la raíz.
b) $\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$. En este caso se ha extraído el factor 6 de la raíz.

Potencia de un radical:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$. En particular: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a$.

Ejemplos:
a) $\sqrt{7^2}=7$; $\left(\sqrt{11}\right)^2=11$; $\left(\sqrt{3}\right)^4=\sqrt{3^4}=3^{4/2}=3^2=9$.
b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}$; $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=\sqrt[3]{5^3}=5^{3/3}=5$.

Cociente de radicales:

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. En particular, para raíces cuadradas: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Ejemplos:
a) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{50}{10}}=\sqrt{5}$. b) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{50}{2}}=\sqrt{25}=5$. c) $\sqrt{\dfrac{150}{4}}=\dfrac{\sqrt{150}}{2}=\dfrac{\sqrt{25\cdot 6}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

En los casos a) y b) se ha conseguido un resultado simple. En el caso c) se han extraído del radical todos los factores posibles; es otra manera de escribir lo mismo.

Suma y resta de radicales
La suma y resta de radicales sólo puede "hacerse" cuando intervienen radicales semejantes. Alguna vez los radicales pueden hacerse semejantes, extrayendo o introduciendo factores en la raíz. Para raíces cuadradas, la introducción o extracción de factores se hace como sigue:

- Introducción: $a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$. Para introducir un factor se eleva al cuadrado.

Ejemplos:

a) $2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$. b) $4\cdot\sqrt{5}=\sqrt{4^2\cdot 5}=\sqrt{80}$. c) $3\sqrt{x^2-2}=\sqrt{9\left(x^2-2\right)}=\sqrt{9x^2-18}$

- Extracción: Si $N=A\cdot b$, entonces $\sqrt{N}=\sqrt{A\cdot b}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{b}=a\cdot\sqrt{b}$, supuesto que $\sqrt{A}=a$.

Ejemplos:

a) $\sqrt{500}=\sqrt{100\cdot 5}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{5}=10\cdot\sqrt{5}$. b) $\sqrt{98}=\sqrt{49\cdot 2}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{2}=7\sqrt{2}$.

c) $\sqrt{9x^2-18}=\sqrt{9\left(x^2-2\right)}=3\sqrt{x^2-2}$. d) $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$ $\to$ Puede ser un error grave.

e) $\sqrt{4x^2-100x^4y^2}=\sqrt{4x^2\left(1-25x^2y^2\right)}=2x\cdot\sqrt{1-25x^2y^2}$ $\to$ Se extraen factores, no sumandos.

- Para sumar o restar radicales deben ser <u>equivalentes</u> (los que tienen el mismo índice y el mismo radicando; también se llaman <u>semejantes</u>).

Ejemplos:

a) $8\sqrt{5}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=(8-3+2)\cdot\sqrt{5}$. Ha bastado con sumar (sacando factor común).

b) La operación $8\sqrt{2}+3\sqrt{32}-\sqrt{98}$ no puede hacerse inicialmente; pero operando dentro de los radicales pueden extraerse factores y hacer que los radicales sean semejantes, para después sumar o restar. Así:

$$8\sqrt{2}+3\sqrt{32}-\sqrt{98}=8\sqrt{2}+3\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{49\cdot 2}=8\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{49}\cdot\sqrt{2}=$$
$$=8\sqrt{2}+3\cdot 4\cdot\sqrt{2}-7\cdot\sqrt{2}=8\sqrt{2}+12\sqrt{2}-7\sqrt{2}=(8+12-7)\cdot\sqrt{2}=13\sqrt{2}.$$

<u>Operaciones combinadas</u>

Para realizar operaciones combinadas hay que tener en cuenta tanto las propiedades de los radicales como las de las operaciones ordinarias, cuidando los signos y la prioridad de las operaciones.

Ejemplos:

a) $3(2-\sqrt{5})=3\cdot 2-3\cdot\sqrt{5}=6-3\sqrt{5}$.

b) $(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{2}+5)=2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+5\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{2}-5=2\sqrt{6}+5\sqrt{3}-2\sqrt{2}-5$.

c) $\left(3\sqrt{2}-2\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2+2^2=9\cdot 2-12\sqrt{2}+4=22-12\sqrt{2}$.

d) $\left(3-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)=3^2-\left(\sqrt{6}\right)^2=9-6=3$.

Pequeños retos

1. Halla, si es posible sin calculadora, el valor de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{5^6}$ b) $\left(2^{1/4}\right)^8$ c) $\left(5^6\right)^{2/3}$ d) $\sqrt{3^3\cdot 12^3}$ f) $\sqrt{\dfrac{16}{100}}$ g) $\sqrt[3]{9\cdot 81}$

2. Halla:

a) $\left(4\sqrt{3}-2\right)\left(5\sqrt{3}\right)$ b) $\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)$ c) $\left(3+5\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}\right)$ d) $\dfrac{7\sqrt{12}-\sqrt{243}}{3\sqrt{27}}$

3. Simplifica:

a) $3\sqrt{20}+4\sqrt{125}-2\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{75}-12\sqrt{27}+5\sqrt{108}$

Soluciones:

1. a) 25. b) 4. c) 5^4. d) $36^{3/2}=6^3$. f) 0,4. g) 3.

2. a) $60-10\sqrt{3}$. b) 4. c) $9\sqrt{2}+30$. d) 5/9. **3.** a) $24\sqrt{5}$. b) $4\sqrt{3}$.