POTENCIACIÓN DE EXPONENTE ENTERO

La potenciación, que inicialmente indica la multiplicación repetida de un mismo número, tiene distintos significados matemáticos.

Potenciación de exponente natural
Definición:

$a \cdot a \cdot \ldots\ldots a = a^n$, $n \in \mathbf{N}$. **Ejemplo**: $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3 = -8$.

Por convenio: $a^0 = 1$, si $a \neq 0$. **Ejemplo**: $5^0 = 1$; $(-3)^0 = 0$; $(0,2)^0 = 1$.

- El signo del resultado depende del signo de la base y de la paridad del exponente (par o impar), cumpliéndose:

$(+a)^n = +a^n = a^n \rightarrow$ siempre positivo

$(-a)^n = +a^n = a^n$, positivo si n es par; $(-a)^n = -a^n$, negativo si n es impar

Ejemplos:

a) $(+2)^4 = 2^4 = 16$. b) $(+2)^5 = 2^5 = 32$.

c) $(-2)^4 = 2^4 = 16$. d) $(-2)^5 = -2^5 = -32$.

Potenciación de exponente entero (negativo)

Por convenio: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. **Ejemplo**: $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$.

En Álgebra, esta manera de escribir aparece con relativa frecuencia. Y puede ser conveniente expresar esta equivalencia en un sentido o en su contrario.

Ejemplos:

a) $3x - 2x^{-1} = 3x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^2 - 2}{x}$. b) $\dfrac{2x}{(x^2+3)^5} = 2x\left(x^2+3\right)^{-5}$.

c) $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^2} = \dfrac{x^3}{x^2} - \dfrac{4x^2}{x^2} + \dfrac{3}{x^2} = x - 4 + 3x^{-2}$.

Reglas prácticas para operar con potencias (propiedades)
Las propiedades principales de las potencias son:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ **Ejemplo**: $3^2 \cdot 3^3 = (9 \cdot 27) = 3^{2+3} = 3^5 = 243$.

$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ **Ejemplo**: $\left(3^2\right)^3 = (9)^3 = 3^6 = 729$.

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ **Ejemplo**: $\dfrac{4^5}{4^2} = \left(\dfrac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}\right) = 4^{5-2} = 4^3 = 64$.

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ **Ejemplo**: $(3a)^2 = 9a^2$; $\left(-2x^2\right)^3 = (-2)^3 x^6 = -8x^6$.

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ **Ejemplo**: $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^3 = \dfrac{(-1)^3}{5^3} = \dfrac{-1}{125}$; $\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^5 = \dfrac{2^5}{x^{10}}$.

En todos los casos n y m son números enteros.

Observaciones:

1) Como siempre, la existencia o no de paréntesis no es indiferente. No es lo mismo $a \cdot b^n$ que $(a \cdot b)^n$. Téngase en cuenta que el punto de multiplicar no suele escribirse. Insisto: $ax^n \neq (ax)^n$

Ejemplos:

- $2x^3 \neq (2x)^3 = 8x^3$
- $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$
- $(3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$
- $-2x^4 \neq (-2x)^4 = 16x^4$
- $-2^2 \cdot 5^2 = -4 \cdot 25 = -100$
- $(-2)^3 \cdot (-5)^2 = -8 \cdot 25 = -200$

2) Siempre hay que tener en cuenta las reglas de los signos.
Las dudas suelen plantearse al calcular valores numéricos para polinomios u otras expresiones algebraicas. Véanse algunos supuestos.

Ejemplo:

Si $P(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x - 1$, sus valores numéricos para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$ son:

$P(-2) = -(-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 1 = -(-8) + 5 \cdot 4 + 6 - 1 = 33$

$P(-1) = -(-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 1 = -(-1) + 5 \cdot 1 + 3 - 1 = 8$

$P(0) = -1$; $P(1) = -1^3 + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = 0$; $P(3) = -3^3 + 5 \cdot 3^2 - 3 \cdot 9 - 1 = -27 + 45 - 27 - 1 = -10$

3) Las potencias *funcionan* bien con los productos y los cocientes. Las fórmulas anteriores no son aplicables a sumas y restas. Lo sentimos: $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$.

Ejemplos:

- $(2 + 3)^2 \neq 2^2 + 3^2$
- $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$
- $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

Recuérdese:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Pequeños retos

1. Puede ser útil realizar las operaciones siguientes:

a) $(-2)^3 + 3^2 - (5 - 4^2)$ b) $7 - (-2)^3 \cdot (3^2 - 5)$ c) $\dfrac{2 - 3^2}{1 + 3^2}$;

d) $\left(2 - \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{5}{2^3}$ g) $\dfrac{2^6 \cdot 15^5}{10^5 \cdot 9^3}$ h) $\dfrac{(-2)^7 \cdot 5^2 - 2^4}{2^5 \cdot 5}$

2. Expresa sin fracciones y mediante una sola potencia:

a) $\dfrac{5^3}{5^5}$ b) $\dfrac{2^4}{2^7}$ c) $\dfrac{5^4}{15^4}$ d) $\dfrac{(-9)^{-5} \cdot 3^4}{27^{-3}}$

3. Halla el valor numérico de cada uno de los siguientes polinomios para $x = 1$, $x = -2$ y $x = 0$.

a) $x^2 - 3x + 5$ b) $-2x^3 + 3x^2 - 5$ c) $2x^3 - 3x$ d) $3x^4 - 2x^2 - 1$

Soluciones

1. a) 12. b) 39. c) $-\dfrac{7}{10}$. d) $\dfrac{155}{72}$. g) $\dfrac{2}{3}$. h) $-\dfrac{201}{10}$.

2. a) 5^{-2}. b) 2^{-3}. c) 3^{-4}. d) -3^3.

3. a) $x = 1 \to 3$; $x = -2 \to 15$; $x = 0 \to 5$. b) –4; 23; –5. c) –1; –10; 0. d) 4; 39; –1.