OPERACIONES CON NÚMEROS REALES: PROPIEDADES

Las operaciones que se definen en **R** son dos: la suma y el producto; la resta es la opuesta de la suma, mientras que la división es la inversa del producto. La potenciación y la radicación se entienden a partir del producto.

Propiedades de la suma

Propiedad asociativa. Para sumar tres o más números se pueden ir sumando según nos interese: comenzando por la izquierda o por la derecha.
Con símbolos, donde a, b y c designan números reales cualesquiera, se escribe así:

$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.

El paréntesis indica prioridad.

- En el primer caso, primero se suman a y b, y a su resultado se le suma c.
- En el segundo caso, primero se suman b y c, y a su resultado se le suma a.

Ejemplos:

a) $7 + 14 + 32 = (\mathbf{7 + 14}) + 32 = \mathbf{21} + 32 = 53$; $7 + 14 + 32 = 7 + (\mathbf{14 + 32}) = 7 + \mathbf{46} = 53$

b) $0{,}3 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \left(0{,}3 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0{,}3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = 0{,}3 + 1 = 1{,}3$

Propiedad conmutativa. La suma de dos números reales no depende del orden de colocación. Esto es:

$a + b = b + a$

Por ejemplo: $7 + 14 = 14 + 7 = 21$.

Existencia de elemento neutro. El neutro es el 0: cumple que para todo $a \in \mathbf{R}$, $a + 0 = 0 + a = a$.

Propiedad del opuesto. El opuesto de un número es otro número tal que la suma de ambos da 0. Se obtiene cambiando el signo al número.

Opuesto de $a = -a$

Por ejemplo: el opuesto de 3 es –3; el opuesto de –3 es 3. El opuesto de $\sqrt{5}$ es $-\sqrt{5}$.

- La existencia del opuesto permite definir la operación resta como sigue:

$a - b = a + (-b)$

Ejemplos:

$13 - 9 = 13 + (-9) = 8$ $6 - (-9) = 6 + 9 = 15$

Propiedades de producto

Propiedad asociativa. Para multiplicar tres o más números se pueden ir multiplicando según nos interese: comenzando por la izquierda o por la derecha.

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Ejemplos:

a) $7 \cdot 2 \cdot 5 = (\mathbf{7 \cdot 2}) \cdot 5 = \mathbf{14} \cdot 5 = 70$; $7 \cdot 2 \cdot 5 = 7 \cdot (\mathbf{2 \cdot 5}) = 7 \cdot \mathbf{10} = 70$

b) $\mathbf{0{,}3 \cdot 0{,}7} \cdot 10 = \mathbf{0{,}21} \cdot 10 = 2{,}1$; $0{,}3 \cdot \mathbf{0{,}7 \cdot 10} = 0{,}3 \cdot \mathbf{7} = 2{,}1$

c) $4 \cdot (-2) \cdot (-9) = (-8) \cdot (-9) = 72$; $4 \cdot (-2) \cdot (-9) = 4 \cdot (+18) = 72$

Propiedad conmutativa. El producto de dos objetos matemáticos (números en particular) no depende del orden de colocación. Esto es:

$a \cdot b = b \cdot a$

Por ejemplo: $6 \cdot 15 = 15 \cdot 6 = 90$; $0{,}2 \cdot 100 = 100 \cdot 0{,}2 = 20$

Existencia de elemento unidad. La unidad es el 1: cumple que para todo $a \in \mathbf{R}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
Observación: En el producto no suele ponerse el 1, pero siempre está. Tampoco suele ponerse el 1 como exponente, pero siempre está. Esta observación obvia no lo debe ser tanto, pues muchos estudiantes tienen dificultad de ver el 1 cuando se trata de sacar factor común.

Propiedad del inverso. El inverso de un número, distinto de 0, es otro número tal que el producto de ambos da 1. En inverso de a es $\frac{1}{a}$. Como fácilmente se ve: $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{a}=1$

Ejemplos:

a) El inverso de 3 es $\frac{1}{3}$. El inverso de $\frac{1}{3}$ es 3. Efectivamente, $3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 3=1$.

b) El inverso de $\frac{3}{7}$ es $\frac{7}{3}$. El inverso de –2 es $\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

• La existencia del inverso permite definir la división (o cociente) de la siguiente manera:

$a:b=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$

Ejemplos:

a) $13 : 7 = 13\cdot\frac{1}{7}=\frac{13}{7}$ b) $4:\frac{2}{5}=4\cdot\frac{5}{2}=\frac{20}{2}=10$ c) $\frac{3}{7}:\frac{2}{9}=\frac{3}{7}\cdot\frac{9}{2}=\frac{27}{14}$

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma dice: “el producto de un número por una serie de sumandos puede calcularse de dos maneras equivalentes: multiplicando el número por el resultado de la suma o bien sumando las multiplicaciones del número por cada uno de los sumandos”.

$a \cdot (b + c + d) = ab + ac + ad$

Ejemplo:

Sin utilizar la propiedad distributiva: $6 \cdot (3 + 9 - 4) = 6 \cdot 8 = 48$.
Aplicando la propiedad distributiva:

$6 \cdot (3 + 9 - 4) = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 9 - 6 \cdot 4 = 18 + 54 - 24 = 18 + 30 = 48$.

Observación: Parece claro que la propiedad distributiva no debe emplearse en casos como el del ejemplo anterior: se tarda más en operar. Debe emplearse cuando no puede operarse dentro del paréntesis. Por ejemplo: $3 \cdot (2 - 6x) = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 6x = 6 - 18x$.

• La propiedad distributiva utilizada de derecha a izquierda se conoce con el nombre de sacar factor común. Esto es:

$ab + ac + ad = a \cdot (b + c + d)$

Observación: Como se ha advertido antes no es evidente el factor 1, pero está. Así, por ejemplo:

$ab+ac+a=a\cdot b+a\cdot c+a\cdot 1=a\cdot(b+c+1)$

Otros ejemplos: a) $20 + 4 - 16 = 4 \cdot (5 + 1 - 4) = 4 \cdot 2 = 8$; b) $3x^2-x=3x\cdot x-1\cdot x=(3x-1)\cdot x$.