FRACCIONES ALGEBRAICAS: DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES (II)

(Esta descomposición se utiliza básicamente para la integración de fracciones racionales).

Caso 3: El denominador no tiene raíces reales $\Rightarrow$ ax^2+bx+c es irreducible.

Se hace la descomposición: $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\dfrac{k(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\dfrac{B}{1+(px+q)^2}$,

donde $ax^2+bx+c=1+(px+q)^2$. En todos los casos *A* y *B* o *k*, *p* y *q*, son números reales.

Ejemplo:

La fracción racional $\dfrac{2-x}{x^2+2x+2}$ verifica que la ecuación $x^2+2x+2=0$ no tiene raíces reales. Por tanto, se hace la descomposición:

$$\frac{2-x}{x^2+2x+2}=\frac{-\frac{1}{2}(2x+2)+3}{x^2+2x+2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{3}{1+(x+1)^2}$$

$\to$ el <u>numerador</u>, $2-x=-\dfrac{1}{2}(2x+2)+3$; $\to$ el <u>denominador</u>, $x^2+2x+2=1+(x+1)^2$.

Para obtener esta descomposición se escribe $2-x=k(2x+2)+B$, siendo el término $2x+2$ la derivada del denominador; después se calculan las constantes mediante la identificación de los coeficientes de ambos miembros. Paso a paso, sería como sigue:

1) Se escribe la derivada del denominador: $\dfrac{2-x}{x^2+2x+2}=\dfrac{k(2x+2)+B}{x^2+2x+2}$

2) De $2-x=k(2x+2)+B$ $\Rightarrow$ $2-x=2k+B+2kx$ $\Rightarrow$ $2k=-1\to k=-1/2$; $B=3$.

3) Por tanto,

$$\frac{2-x}{x^2+2x+2}=\frac{-\frac{1}{2}(2x+2)+3}{x^2+2x+2}=\frac{-\frac{1}{2}(2x+2)}{x^2+2x+2}+\frac{3}{x^2+2x+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2-x}{x^2+2x+2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{3}{1+(x+1)^2}.$$

Pequeños retos

Descompón en fracciones simples: $\dfrac{2x+1}{x^2+2x+2}$.

Solución:

$$\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{(x+1)^2+1}$$

E l lector interesado puede encontrar la descomposición de fracciones racionales con denominador de tercer grado en http://www.matematicasjmmm.com/matemticas-ii-tecnolgico, Tema 10