FRACCIONES ALGEBRAICAS: DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES (I)

El proceso de descomposición de una fracción racional en suma de fracciones simples se emplea, por ejemplo, para hallar asíntotas de una función o para resolver algunas integrales.

- Cuando el denominador de una fracción racional puede descomponerse en factores, la fracción dada se puede escribir como suma (o diferencia) de otras fracciones más sencillas. En el caso de que los factores del denominador sean irreducibles, este proceso se conoce con el nombre de descomposición en fracciones simples.

Aquí se estudiarán los casos más fáciles, cuando el denominador es un polinomio de 2º grado:

$F(x)=\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$, con $a \neq 0$; y, además, el denominador ax^2+bx+c tiene dos raíces reales.

Ejemplos:

a) Cuando el denominador es una expresión de primer grado, la descomposición se realiza haciendo la división. Así, $\dfrac{2x^3-3x+2}{x+1}=2x^2-5x+5+\dfrac{-3}{x+1}$.

b) Si se plantea la fracción $\dfrac{2x^3-3x+2}{x^2+2x}$, dividiendo se obtiene

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & & -3x & +2 & x^2+2x \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -4x^2 & & & 2x-4 \\ \cline{1-4}
 & -4x^2 & -3x & +2 & \\
 & +4x^2 & +8x & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x & +2 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \frac{2x^3-3x+2}{x^2+2x}=2x-4+\frac{5x+2}{x^2+2x}.$$

Por tanto, el estudio de la descomposición en fracciones puede reducirse a $F(x)=\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$.

Caso 1: El denominador ax^2+bx+c tiene dos raíces reales simples y distintas. Esto es, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones, $x = x_1$ y $x = x_2$, lo que implica que

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

En este caso, la descomposición que se hace es:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{a(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)}$$

Los valores de A y B, que son números, se determinan por el llamado método de identificación de coeficientes. Se verá con un ejemplo.

Ejemplo:

Para $\dfrac{x+8}{x^2+x-2}$, como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2 \Rightarrow x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, puede escribirse la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \rightarrow \text{se suman las dos fracciones simples.}$$

La fracción dada (la primera) y la obtenida al sumar las dos fracciones simples (la última) son iguales; y como sus denominadores son iguales, también deben serlo sus numeradores. En consecuencia:

$$x+8 = A(x+2)+B(x-1) \Leftrightarrow x+8=(A+B)x+2A-B \Rightarrow \begin{cases} 1 = A+B \\ 8 = 2A-B \end{cases}$$

(→ se han igualado los coeficientes de x y los términos independientes).
Resolviendo el sistema se obtienen los valores de A y B, que son $A = 3$ y $B = -2$.
Por tanto:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2}$$

Caso 2: El denominador ax^2+bx+c tiene una raíz real doble. Esto es, la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene una solución doble: $x = x_1$, lo que implica que $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$).
En este caso, la descomposición que se hace es:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)^2} + \frac{B}{(x-x_1)} .$$

Los valores de A y B son números se determinan como en el caso anterior.

Ejemplo:
Para $\frac{2x-5}{x^2-2x+1}$, como la ecuación $x^2-2x+1=0$ tiene la solución doble $x = 1$; esto es $x^2-2x+1=(x-1)^2$, la descomposición que se hace es:

$$\frac{2x-5}{x^2-2x+1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A+B(x-1)}{(x-1)^2}$$ → se han sumado las dos fracciones simples.

Como antes, la fracción dada y la obtenida al sumar las dos fracciones simples son iguales. Al ser iguales sus denominadores, también lo serán sus numeradores. En consecuencia:

$$2x-5 = A+B(x-3) \Rightarrow 2x-5 = Bx+A-3B \Rightarrow \begin{cases} 2 = B \\ -5 = A-3B \end{cases}$$

La solución del sistema es $B = 2$ y $A = 1$.

Por tanto, puede escribirse: $\frac{x-5}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$

Pequeños retos
Halla la descomposición en fracciones simples de las siguientes fracciones racionales.

a) $\frac{x^3-3x^2+2}{x-2}$ b) $\frac{1}{x^2-4}$ c) $\frac{4x+3}{x^2+4x+3}$ d) $\frac{x-2}{x^2+4x+4}$

Soluciones:
a) $x^2-x-2-\frac{2}{x-2}$. b) $\frac{1/4}{x-2}+\frac{-1/4}{x+2}$. c) $\frac{-1/2}{x+1}+\frac{9/2}{x+3}$. d) $\frac{-4}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}$.