FRACCIONES ALGEBRAICAS: DEFINICIONES Y SIMPLIFICACIÓN

Las fracciones algebraicas son de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, aunque el numerador puede ser una constante. También pueden considerarse fracciones algebraicas con más de una variable.

Ejemplos:

a) Son fracciones algebraicas: $\dfrac{x^2}{x+1}$ o $\dfrac{5}{x^2-1}$.

b) Si el denominador es un número pueden tratarse como un polinomio de coeficientes racionales. Así: $\dfrac{x^2-2x}{3} = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}x$.

Equivalencia y simplificación

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow A(x) \cdot D(x) = B(x) \cdot C(x)$$

Para obtener fracciones equivalentes se multiplica o divide el numerador y el denominador por una misma expresión algebraica no nula. Esta propiedad permite simplificar fracciones algebraicas.

Ejemplos:

a) Las fracciones algebraicas $\dfrac{x}{x-3}$ y $\dfrac{x(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{x^2+2x}{x^2-x-6}$ son equivalentes. En la segunda se han multiplicado el numerador y el denominador por la expresión $x+2$.

b) La fracción algebraica $\dfrac{x^2+3x}{x^3-x} = \dfrac{x(x+3)}{x(x^2-1)} = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ → Se ha simplificado el factor x.

c) La fracción algebraica $\dfrac{6x^2-9x}{3x^2} = \dfrac{3x(2x^2-3)}{3x \cdot x} = \dfrac{2x^2-3}{x}$ → Se ha dividido por $3x$.

- La simplificación de fracciones algebraicas, conveniente en muchas ocasiones, sigue las mismas pautas que la simplificación de las fracciones ordinarias: se simplifican dividiendo numerador y denominador por factores comunes.

Observación:

El proceso de simplificación acarrea algunos errores; el más frecuente es "quitar" sumandos comunes en numerador y denominador: recuérdese: se simplifican factores, no sumandos; por eso hay que sacar factor común, cuando se pueda, y factorizar si es necesario tanto el numerador como el denominador. Este es el motivo por el que no conviene hacer las multiplicaciones en los términos de las fracciones algebraicas, pues al hacerlo se transforman productos en sumandos.

Ejemplos:

a) La fracción $\dfrac{x^3+x^2}{x^3+x^2-2x} = \dfrac{x(x^2+x)}{x(x^2+x-2)} = \dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}$.

Siguiendo con la última fracción, un ERROR importante sería continuar y escribir:
$\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{-2}$, quitando "fatalmente" de ambos términos los sumandos x^2+x.

b) La fracción $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ puede simplificarse o no. Para ello hay que buscar factores comunes a ambos términos. En este caso, los factores del denominador son fáciles de identificar, pues $x^2-1=(x-1)(x+1)$. ¿Tendrá el numerador alguno de esos factores? Si se prueba $x = 1$ se ve que es raíz del numerador $\Rightarrow x-1$ es uno de sus factores. Por tanto, dividiendo se obtiene que $x^3-x^2+x-1=(x-1)\cdot(x^2+1)$.

En consecuencia: $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

c) $\dfrac{2x-2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{(2x-2)x^2}{(x^2+1)(x-1)}=\dfrac{2(x-1)x^2}{(x^2+1)(x-1)}=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

Observaciones:
Puede ser útil comprobar detenidamente los siguientes ejemplos.

a) ERROR: $\dfrac{2x^5-x^3}{x^4+x^3}=\dfrac{2x-1}{1+1}=\dfrac{2x-1}{2}$; sigue mal: $\dfrac{2x^5-x^3}{x^4+x^3}=\dfrac{2x^5-1}{x^4+1}$

Lo correcto es: $\dfrac{2x^5-x^3}{x^4+x^3}=\dfrac{x^3(2x^2-1)}{x^3(x+1)}=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$

b) ERROR: $\dfrac{(2x+2)(x-2)^2-(x^2+2x)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\dfrac{(2x+2)-(x^2+2x)\cdot 2(x+2)}{(x-2)^2}$ $\longrightarrow$ se ha suprimido $(x-2)^2$ del primer término del numerador y el mismo $(x-2)^2$ en el denominador.

Lo correcto es: $\dfrac{(2x+2)(x-2)^2-(x^2+2x)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\dfrac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x)\cdot 2}{(x-2)^3}$ $\longrightarrow$ se ha suprimido $(x-2)$ de ambos términos del numerador (factor común) y el mismo $(x-2)$ en el denominador.

Si se continúa: $\dfrac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x)\cdot 2}{(x-2)^3}=\dfrac{2x^2-2x-4-2x^2-4x}{(x-2)^2}=\dfrac{-6x-4}{(x-2)^2}$

Pequeños retos

Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{4x^3-2}{2x}$ b) $\dfrac{-2x^3+3x}{x^2}$ c) $\dfrac{4x^2-x}{x^2+3x}$ d) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

e) $\dfrac{(3x^2+2)(x+1)^2-(x^3+2x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$ f) $\dfrac{3(x-1)^2-2x(x-1)}{x^2-3x+2}$

Soluciones:

a) $\dfrac{2x^3-1}{x}$. b) $\dfrac{-2x^2+3}{x}$. c) $\dfrac{4x-1}{x+3}$. d) $\dfrac{x-3}{x+3}$. e) $\dfrac{x^3+3x^2-2x+2}{(x+1)^3}$. f) $\dfrac{x-3}{x-2}$.