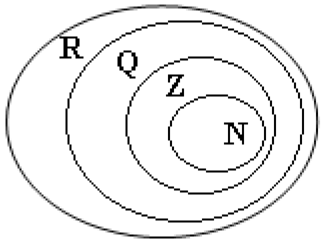
EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales, **R**, es el más amplio de los números usuales. Puede considerarse como una sucesiva ampliación de los demás conjuntos numéricos, pues: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$
Esquemáticamente:

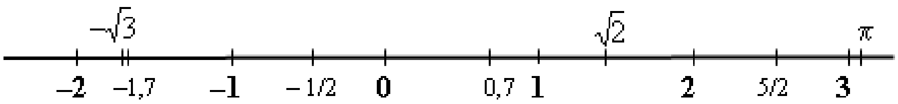
$$\text{Reales} \begin{cases} \text{Racionales} \begin{cases} \text{Enteros} \begin{cases} \text{Naturales} \\ \text{Negativos} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \text{Irracionales} \end{cases}$$



Cuando no se advierte nada se trabaja con números reales. Esto es, el número de partida o el buscado es un número real, no debiendo restringirlo a natural, entero o racional. Esta premisa es muy importante y necesaria en Análisis Matemático (en Cálculo). Así, los conceptos de función, de límite, de derivada… tienen significado en **R**, y pueden resultar no válidos para los demás conjuntos numéricos. Por eso, al definir el conjunto de los números reales hay que precisar los conceptos.

La recta real

Los números reales pueden representarse sobre una recta. Así:



A cada punto de la recta le corresponde un número real; y al revés, a cada número real le corresponde un punto de la recta.
La recta real es "compacta": no tiene ningún punto vacío, sin rellenar. Entre cada dos números reales siempre hay otro número real. Así, entre 0,65 y 0,66 está, por ejemplo, 0,651. Entre 0,65 y 0,651 está 0,6501... En consecuencia, entre cada dos números reales hay infinitos números reales.
La representación gráfica de un número real en la recta siempre es aproximada.
Los números reales con infinitas cifras decimales suelen aproximarse, pero hay que saber que se ha hecho una aproximación. Cuando se opera debe hacerse con el número real exacto, no con su aproximación. Y cuando se da un resultado debe darse el número real, aunque puede convenir dar su aproximación para entender mejor el resultado. Así, por ejemplo si un resultado es $\sqrt{32}$ puede darse $\sqrt{32} \approx 5{,}66$, pero no dar como solución sólo 5,66.

Definición axiomática de R

El conjunto de los números reales se puede definir de manera axiomática como sigue:
1) R tiene estructura algebraica de cuerpo: la terna (**R**, +, ·) es un cuerpo.
Con esto se quiere decir que en **R** hay definidas dos operaciones + y ·, suma y producto, que cumplen las siguientes propiedades:

Respecto de la suma:
- Asociativa: $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$.
- Conmutativa: $a+b=b+a$.
- Existe neutro, que es el 0, que cumple: $a+0=0+a=a$.
- Todo elemento de **R** tiene opuesto. El opuesto de a se escribe $-a$ y cumple: $a+(-a)=0$.

Respecto del producto:

Asociativa: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$.

Existe elemento unidad, que es el 1, que cumple: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Todo elemento de **R**, distinto de 0, tiene inverso.

(El inverso de a se escribe $\frac{1}{a}$ o a^{-1} y cumple: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$).

Además se cumple la propiedad distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

<u>Observación</u>: La propiedad $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ no es una triviliadad. Por ejemplo, es necesaria para sacar factor común; así $3ab + b = 3a \cdot b + 1 \cdot b = (3a + 1) \cdot b$.

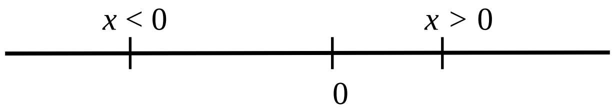
2) R es un conjunto totalmente ordenado.

Esto quiere decir que dados dos número reales, x e y, se cumple alguna de las desigualdades siguientes: $x < y$, o bien, $y < x$. (El símbolo $<$ puede sustituirse por $\leq$).

- $x < y$ significa que $y - x > 0$.
- $x \leq y$ significa que $y - x \geq 0$.

Gráficamente, un número real es mayor que otro si está representado a su derecha. Los números situados a la izquierda del 0 se llaman negativos; los situados a su derecha, positivos.

x negativo $\Leftrightarrow x < 0$ x positivo $\Leftrightarrow x > 0$



Además se verifican:

- Si $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$, para cualesquiera $x, y, z \in$ **R**.
- Si $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$, para cualesquiera $x, y \in$ **R** y $z \geq 0$.
- Si $x \leq y \Rightarrow xz \geq yz$, para cualesquiera $x, y \in$ **R** y $z \leq 0$.

<u>Observación</u>: El conjunto de los números racionales, Q, verifica las propiedades anteriores. Lo que hace más potente a **R** es el tercer axioma.

3) <u>Axiomas del extremo superior</u>: "Todo conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente posee extremo superior".

Esto es, si A es un conjunto de números reales, $A \neq \varnothing$, y está acotado superiormente, entonces A tiene una cota superior mínima.

- Definiciones:

<u>Cota</u>: Un conjunto $A \subset$ **R** está acotado superiormente si existe un número k, tal que para todo $x \in A$ se cumple que $x \leq k$. A k se le llama cota de A.

Un conjunto A puede tener infinitas cotas. (Análogo para cota inferior).

<u>Extremo superior (m)</u>: es la menor de las cotas superiores de A; la cota superior mínima (también se llama supremo). Si $m \in A$, se le llama máximo, pues coincide con el mayor número de A. (Análogo para extremo inferior; y para mínimo).

Ejemplos:

a) El conjunto de los números reales que son menores que 2, $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 2\}$, está acotado superiormente por 7, y por 3, y por 2,3... El extremo superior, la cota superior mínima es 2. Este conjunto no tiene máximo: no puede concretarse; se sabe que es 1,999…

b) El conjunto de los números reales $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \le 3\}$, está acotado superiormente por 3,2, y por 3,1, y por 3,01. La cota superior mínima de *B* es 3. Este conjunto tiene un valor máximo, que es 3.

c) El conjunto de los números reales $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \le x < 3\}$, está acotado inferiormente por 0, y por 0,9, y por 1, que es el extremo inferior, la cota inferior máxima; coincide con el mínimo de *C*. (Este conjunto también está acotado superiormente por 3).