NÚMEROS FACTORIALES Y COMBINATORIOS

Factorial de un número

Si n es un número natural, se define factorial de n y se escribe $n!$, a la expresión:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots3\cdot2\cdot1$$

Ejemplo:
7! = 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5040.

→ Por convenio, factorial de cero vale 1: 0! = 1 (También 1! = 1).

Propiedades de los números factoriales

1. Fórmula de recurrencia: $n! = n\cdot(n-1)!$
2. Simplificación: $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n$

Ejemplos:

a) 10! = 10 · 9!

b) $\dfrac{14!}{13!} = 14$.

Números combinatorios

Se denotan de la forma $\binom{n}{r}$, siendo $n \geq r$; se lee n sobre r, y su valor es: $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

Ejemplos:

a) $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!\cdot5!} = \dfrac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\cancel{3\cdot2}\cdot1\cdot\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = 56$.

b) $\binom{15}{4} = \dfrac{15!}{4!(15-4)!} = \dfrac{15!}{4!\cdot(11!)} = \dfrac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot\cancel{(11!)}}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot\cancel{(11!)}} = 1365$.

Observaciones:

Los números factoriales y combinatorios se utilizan fundamentalmente en combinatoria, para agilizar y simplificar problemas de recuento; y en el cálculo de probabilidades. También se utilizan para desarrollar la potencia de un binomio. En concreto:

1) El número n sobre r indica el número de muestras de tamaño r que pueden obtenerse de una población con n elementos. Su uso se hace imprescindible para el estudio de la distribución de probabilidad binomial, en donde los individuos de una población pueden presentar dos características dicotómicas: sí–no; éxito–fracaso.

2) Factorial de n, es el número de formas distintas en las que se pueden colocar n elementos.

3) Los números combinatorios $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ son los coeficientes de los sucesivos términos del desarrollo de la potencia de un binomio: $(p+q)^n$. (Fórmula de Newton para el cálculo de la potencia n-ésima de un binomio).

Propiedades de los números combinatorios.
Las más utilizadas son:

1. $\binom{n}{0}=1$ 2. $\binom{n}{n}=1$

Ejemplos:

$\binom{16}{0}=1$ $\binom{15}{15}=1$

3. $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ 4. $\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}$

Ejemplos:

$\binom{16}{3}=\binom{16}{13}$ $\binom{15}{4}+\binom{15}{5}=\binom{16}{5}$

Triángulo de Tartaglia
Estas propiedades permiten construir el llamado triángulo de Tartaglia, que facilita el cálculo de algunos números combinatorios.

$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	$\longrightarrow$	1 1
$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	$\longrightarrow$	1 2 1
$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	$\longrightarrow$	1 **3** **3** 1
$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	$\longrightarrow$	1 **4** **6** 4 1
$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$	$\longrightarrow$	1 5 **10** 10 5 1
… … …		… … …

Puede observarse que cada número "interior" del "triángulo" se obtiene sumando los dos inmediatos superiores. Todos los números "de fuera" valen 1.

Pequeños retos

1. Halla el valor de:

a) 5! b) 6! c) $\binom{6}{4}$ d) $\binom{12}{9}$.

2. Comprueba que $\binom{15}{4}+\binom{15}{5}=\binom{16}{5}$.

Solución:
1. a) 120. b) 720. c) 15. d) 220.
Observación: Las calculadoras científicas permiten estos cálculos de modo sencillo. .