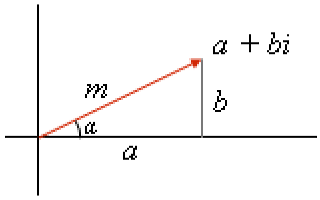
OPERACIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR: POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

Forma polar de un número complejo

Si $z = a + bi$, la expresión $z = m_\alpha$ es la forma polar o módulo-argumental del número complejo.

Módulo → $m = \sqrt{a^2 + b^2}$. Argumento → α, siendo $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$.

Aquí se tendrá en cuenta que $z = m_\alpha = m_{\alpha + k\cdot 360^\circ}$, $k \in \mathbf{Z}$.



Ejemplo:

El complejo $z = \sqrt{3} - i$ tiene modulo $m = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Su argumento se determina por: $\tan\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 330^\circ$ (la elección de 330º en vez de 150º viene determinada por la situación del afijo, que está en el cuarto cuadrante).

Por tanto: $z = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ} = 2_{330^\circ + k\cdot 360^\circ}$

Multiplicación y división de números complejos en forma polar

Si $z_1 = m_\alpha$ y $z_2 = m_\alpha$ son dos números complejos, su multiplicación y división se hace como sigue:

- Multiplicación: $m_\alpha \cdot r_\beta = (m\cdot r)_{\alpha+\beta}$ → Se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.
- División: $\dfrac{m_\alpha}{r_\beta} = \left(\dfrac{m}{r}\right)_{\alpha-\beta}$ → Se dividen sus módulos y se restan sus argumentos

Ejemplos:

a) $2_{30^\circ} \cdot 3_{45^\circ} = (2\cdot 3)_{30^\circ + 45^\circ} = 6_{75^\circ}$ $\qquad 2_{330^\circ} \cdot 3_{105^\circ} = (2\cdot 3)_{330^\circ + 105^\circ} = 6_{435^\circ} = 6_{(360^\circ + 75^\circ)} = 6_{75^\circ}$

b) $5_{240^\circ} \cdot 4_{120^\circ} = 20_{240^\circ + 120^\circ} = 20_{360^\circ} = 20_{0^\circ} = 20$.

c) $8_{60^\circ} : 2_{30^\circ} = \left(\dfrac{8}{2}\right)_{60^\circ - 30^\circ} = 4_{30^\circ}$ → Recuerda: $4_{30^\circ} = 4\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$.

d) $\dfrac{4_{30^\circ}}{3_{300^\circ}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)_{30^\circ - 300^\circ} = \left(\dfrac{4}{3}\right)_{-270^\circ} = \left(\dfrac{4}{3}\right)_{90^\circ} = \dfrac{4}{3}i$.

Potenciación

Si $z = m_\alpha \Rightarrow z^n = \left(m_\alpha\right)^n = \left(m^n\right)_{n\cdot\alpha}$

→ Si el número complejo viniese dado en forma binaria, se expresará en su forma polar.

Ejemplos:

a) $\left(2_{30^\circ}\right)^5 = \left(2^5\right)_{5\cdot 30^\circ} = 32_{150^\circ}$.

b) Para hallar $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^6$ hay que pasar $1 - \sqrt{3}i$ a forma polar → $1 - \sqrt{3}i = 2_{300^\circ}$.

Por tanto:

$$\left(1 - \sqrt{3}i\right)^6 = \left(2_{300^\circ}\right)^6 = \left(2^6\right)_{6\cdot 300^\circ} = 64_{1800^\circ} = 64_{0^\circ} = 64. \quad \rightarrow 1800^\circ = 5 \cdot 360^\circ \equiv 0^\circ.$$

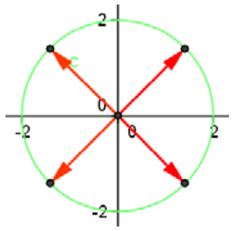
Radicación de números complejos

Se debe tener en cuenta que $z = m_\alpha = m_{\alpha + k\cdot 360^\circ}$. Con esto:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{m_{\alpha+k\cdot 360^\circ}} = \left(\sqrt[n]{m}\right)_{\frac{\alpha+k\cdot 360^\circ}{n}}$$

Hay n raíces diferentes, que se obtienen haciendo que $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ejemplos:



a) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ + k\cdot 360^\circ}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}} = 2_{45^\circ + k\cdot 90^\circ}$.

Variando k (k = 0, 1, 2, 3) se obtienen las cuatro raíces: 2_{45°, 2_{135°, 2_{225°, 2_{315°

→ Los afijos de las raíces están sobre una circunferencia.

b) $\sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)_{45^\circ + k\cdot 360}} = \left(\sqrt[6]{8}\right)_{\frac{45^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}} = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{45^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)_{15^\circ}; \left(\sqrt{2}\right)_{135^\circ}$ y $\left(\sqrt{2}\right)_{255^\circ}$

Pequeños retos

1. Calcula:

a) $2_{15^\circ} \cdot 5_{45^\circ}$ b) $5_{40^\circ} \cdot 4_{50^\circ}$ c) $\dfrac{10_{300^\circ}}{2_{60^\circ}}$

2. Calcula:

a) $\left(2_{30^\circ}\right)^4$ b) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$ c) $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^7$

3. Calcula:

a) $\sqrt[3]{64}$ b) $\sqrt[3]{2-2i}$ c) $\sqrt[4]{i}$

Soluciones:

1. a) $10_{60^\circ} = 5 + 5\sqrt{3}i$. b) $20_{90^\circ} = 20i$. c) $5_{240^\circ} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5\sqrt{3}}{2}i$.

2. a) $16_{120^\circ} = -8 + 8\sqrt{3}i$. b) $16 + 16\sqrt{3}i$. c) 25.

3. a) 4; 4_{120°; 4_{240°. b) 2_{105°; 2_{225°; 2_{345°. c) $1_{22,5^\circ}$; $1_{112,5^\circ}$; $1_{202,5^\circ}$; $1_{292,5^\circ}$.