NÚMEROS COMPLEJOS: OPERACIONES

Operaciones elementales con números complejos en forma binómica

Suma y diferencia

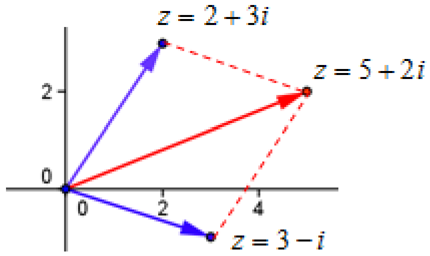
Se hace de manera *natural*: se suman o restan sus partes reales y se suman o restan sus partes imaginarias.

Esto es, si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, se define:

$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$

Observación:

La representación gráfica de la suma es similar a la de la suma de vectores.



Ejemplos:

a) $(2+3i)+(3-i) = (2+3)+(3-1)i = 5+2i$

b) $(4-3i)-2i = 4-5i$.

Producto

El producto de los números complejos, $(a + bi)$ por $(c + di)$, se realiza como si ambos números fueran binomios, considerando que $i^2 = -1$.

Esto es:

$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Observación:

El producto de un número complejo por su conjugado es un número real:

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$.

Ejemplos:

a) $(2 + 3i) \cdot (1 - 2i) = 2 - 4i + 3i - 6i^2 = 2 - i + 6 = 8 - i$

b) $-3 \cdot (4 + i) = -12 - 3i$

c) $(2 - 3i) \cdot (2 + 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$

d) $2i \cdot (3 - 4i) = 6i - 8i^2 = 8 + 6i$

Cociente

Para dividir dos números complejos se multiplican los términos de la fracción asociado por el conjugado del denominador; después se opera y simplifica. Esto es:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo:

$$\frac{1+2i}{3-2i} = \frac{(1+2i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)} = \frac{-1+8i}{9+4} = -\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i$$

Potencias de *i*

$i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -1$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$; … $i^{4n} = 1$.

Ejemplos:

a) $i^{25} = i^{24} \cdot i^1 = i$, pues 25 = 4 · 6 + 1; b) $i^{4014} = i^{4012} \cdot i^2 = -1$, pues 4014 = 4 · 1003 + 2.

La potencia de un número complejo es la multiplicación sucesiva del mismo número complejo. Por tanto, si $z = a + bi$:

$$z^n = (a+bi)^n = (a+bi) \cdot (a+bi) \cdot \ldots \cdot (a+bi)$$

Observaciones:

1) Para hallar estas potencias puede utilizarse la fórmula de la potencia de un binomio.

2) La potenciación siguiendo esta pauta sólo es factible cuando *n* es pequeño.

Ejemplos:

a) $(4+5i)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5i + (5i)^2 = 16 + 40i - 25 = -9 + 40i$

b) $(5-3i)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3i + (3i)^2 = 25 - 30i - 9 = 16 - 30i$

d) $(2+i)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot i + 6 \cdot 2^2 \cdot i^2 + 4 \cdot 2 \cdot i^3 + i^4 = 16 + 32i + 24i^2 + 8i^3 + i^4 =$

$= 16 + 32i - 24 - 8i + 1 = -7 + 24i$.

Pequeños retos

1. Halla las siguientes operaciones:

a) $(3-3i)+(2-2i)$ b) $(3-3i)+(-4+3i)$ c) $(-3+2i)-(2+3i)$

2. Halla las siguientes operaciones:

a) $(3-3i) \cdot (2-2i)$ b) $2 \cdot (1-3i)$ c) $(-3+2i) \cdot (3i)$

3. Aplicando el desarrollo de un binomio y el valor de las sucesivas potencias de *i*, calcula:

a) $(2-3i)^2$ b) $(3+2i)^3$ c) $(1+i)^4$

4. Calcula:

a) $\dfrac{1-2i}{2-2i}$ b) $\dfrac{12-2i}{4}$ c) $\dfrac{4-2i}{2i}$

Soluciones:

1. a) $5-5i$. b) -1. c) $-5-i$.

2. a) $-12i$. b) $2-6i$. c) $-6-9i$

3. a) $-5-12i$. b) $-9+4i$. c) -4.

4. a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$. b) $3 - \frac{1}{2}i$. c) $-1-2i$.