NÚMEROS COMPLEJOS: DEFINICIONES Y FORMAS DE DARLOS

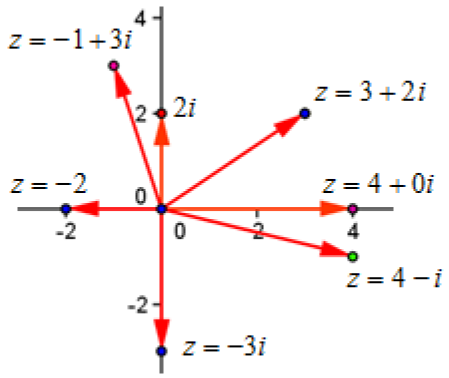
Definición
Un número complejo es una expresión de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales e i la unidad imaginaria. (Este modo de dar un número complejo se llama forma binómica).

Unidad imaginaria: $i = +\sqrt{-1}$. Por tanto, $i^2 = -1$.

En $z = a + bi$, el número a es la parte real del complejo; b recibe el nombre de parte imaginaria.

- El conjunto de los números complejos se denota por **C**. Este conjunto es una ampliación de los números reales. Esto es: $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

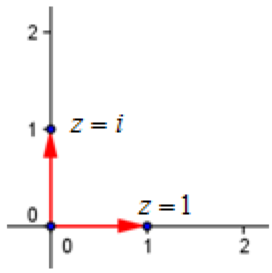
Así como los números reales se representan en una recta, los números complejos deben representarse en el plano cartesiano. A cada número complejo $z = a + bi$ se le asocia el punto (a, b) del plano; ese punto recibe el nombre de afijo del complejo.



Ejemplos:
a) Son números complejos: $z = 3 + 2i$; $z = 4 - i$; $z = -1 + 3i$;

b) Los número complejos de la forma $z = 4 + 0i = 4$ o $z = -2 + 0i = -2$ son los reales $\to$ su parte imaginaria vale 0.

c) Los números complejos de la forma $0 + 2i$ o $z = 0 - 3i = -3i$ se llaman imaginarios puros $\to$ su parte real es 0.



(Como puede observarse los números complejos se representan como los vectores del plano. El eje de abscisas corresponde a la parte real; el de ordenadas, a la parte imaginaria).

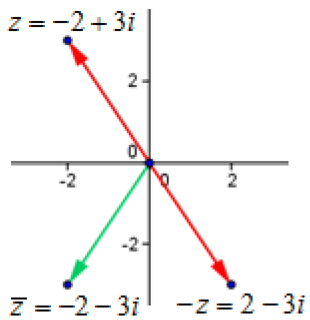
Otras definiciones:

- Dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales cuando son iguales sus partes reales e imaginarias. Es decir $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.

- Dos números complejos son opuestos cuando son opuestas su parte real y su parte imaginaria. El opuesto de $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$.

- Dos números complejos son conjugados cuando tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son opuestas. El conjugado de z, se representa por $\overline{z}$.

El conjugado de $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$.



Ejemplos:
a) Si $a + 3i = -2 + ki \Rightarrow a = -2$ y $k = 3$.

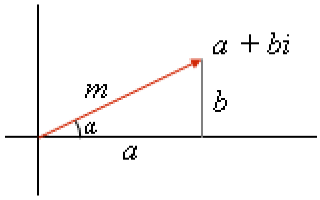
b) Si $z = -2 + 3i$, su opuesto es $-z = 2 - 3i$; su conjugado es $\overline{z} = -2 - 3i$.

Forma polar y forma trigonométrica de un número complejo

Así como un vector puede determinarse dando su módulo y sentido, un número complejo queda determinado del mismo modo. A esta forma de dar un número complejo se le llama forma polar o módulo-argumental del número complejo. Esto es:

$z = a + bi \Leftrightarrow z = m_\alpha \rightarrow m$ designa su módulo; α, su argumento

El módulo es su longitud; el argumento, el ángulo que forma con el eje positivo de abscisas.



Módulo: $m = \sqrt{a^2 + b^2}$.   Argumento: α, siendo $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$

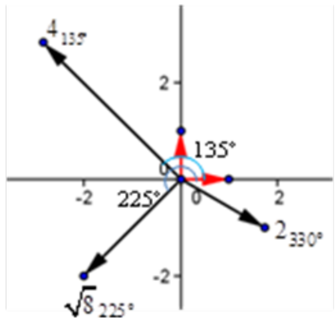
Forma trigonométrica

De $z = a + bi \Leftrightarrow z = m_\alpha \Rightarrow z = m(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Obsérvese que: $\cos\alpha = \dfrac{a}{m} \Rightarrow a = m\cdot\cos\alpha$; $\sin\alpha = \dfrac{b}{m} \Rightarrow b = m\cdot\sin\alpha$.

Luego: $z = a + bi = m\cdot\cos\alpha + i\cdot m\cdot\sin\alpha = m(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Ejemplos:



a) El complejo $z = \sqrt{3} - i$ tiene modulo $m = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Su argumento se determina por: $\tan\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 330^\circ$ (la elección de 330º en vez de 150º viene determinada por la situación del afijo, que está en el cuarto cuadrante).

Por tanto:

$z = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ} = 2(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$.

b) $z = -2 - 2i$ tiene modulo $m = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.

Como $\tan\alpha = \dfrac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow \alpha = 225^\circ$ (la elección de 225º en lugar de 45º viene determinada por la situación del afijo: punto (–2, –2), que está en el tercer cuadrante).

c) $4_{135^\circ} = 4(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) = 4\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$.

d) La unidad real es $1 = 1_{0^\circ}$. La unidad imaginaria: $i = 1_{90^\circ}$.

Pequeños retos

1. Representa gráficamente los números complejos:

a) $z = 1 + 2i$ b) $z = -2 + 4i$ c) $z = -3 - i$ d) $z = -2i$

2. Dado el número complejo $z = 3 + i$ halla su opuesto y su conjugado.

3. Expresa en forma polar y trigonométrica los números complejos:

a) $z = 1 + i$ b) $z = 4i$ c) $z = -1 + \sqrt{3}i$ d) $z = -4$

Soluciones:

3. En forma polar: a) $\sqrt{2}_{45^\circ}$. b) $4_{90}{}^\circ$. c) 2_{120°. d) 4_{180°.