OPERACIONES CON LOGARITMOS

¿Cómo se opera con los logaritmos?

Cuando haya que realizar operaciones con logaritmos o calcular el logaritmo de expresiones en las que los números estén sujetos a cualquiera de las operaciones habituales, pueden utilizarse las propiedades que se indican a continuación, en donde A, B y n son números o expresiones algebraicas.

1. $\log_a (A\cdot B) = \log_a A + \log_a B$ $\rightarrow$ El logaritmo transforma productos en sumas; y al revés.

Ejemplos:

a) log 50 + log 20 = log (50 · 20) = log 1000 = 3.

b) $\log(25\cdot 300) = \log 25 + \log 300 = 1{,}397940 + 2{,}477121 = 3{,}875061$.

Cuando sólo intervienen números, estas propiedades no son indispensables, pues aplicando directamente la calculadora se obtiene el mismo resultado:

En a) log 50 + log 20 = 1,698970… + 1,301029… = 3.

En b) log (25 · 300) = log 7500 = 3,875061.

c) $\log(8x) = \log 8 + \log x$.

¡OJO! Son errores graves: $\log(8x) = 8\cdot\log x$; $\log(8+x) = \log 8 + \log x$

d) $\log(x^2-9) + \log(2x) = \log\left((x^2-9)\cdot 2x\right) = \log\left(2x^3 - 18x\right)$.

2. $\log_a A^n = n\log_a A$ $\rightarrow$ El logaritmo transforma potencias en productos.

Ejemplos:

a) log 12^8 = 8 · log 12 = 8 · 1,079181 = 8,633448.

b) $7\log 5 = \log 5^7 = \log 78125 = 4{,}892790$.

Estas propiedades se hacen más necesarias cuando intervienen expresiones algebraicas.

c) $\log x^8 = 8\log x$; $\log 8^x = x\log 8$.

d) $\log\left(x^2+2\right)^5 = 5\log\left(x^2+2\right)$.

3. $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$ $\rightarrow$ El logaritmo transforma cocientes en restas.

Ejemplos:

a) $\log\dfrac{5}{200} = \log 5 - \log 200 = 0{,}698970 - 2{,}301030 = -1{,}602060$.

b) $\log 2000 - \log 8 = \log\dfrac{2000}{8} = \log 250$.

c) $\log\dfrac{5x^2+3x}{2x-1} = \log\left(5x^2+3x\right) - \log(2x-1)$.

d) $\log\left(x^2-9\right) - \log(x+3) = \log\dfrac{x^2-9}{x+3} = \log\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \log(x-3)$.

4. $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^n = n$.

Ejemplos:

a) $\log_3 1 = 0$, pues $3^0 = 1$ b) $\log_6 6 = 1$, pues $6^1 = 6$ c) $\ln e^3 = 3$.

Observaciones:
En las operaciones con logaritmos son frecuentes los errores. Los más comunes se derivan de la supuesta linealidad de los logaritmos. Así algunos suelen escribir:

$$\log(A\cdot B) = (\log A)\cdot(\log B);\quad \log(A+B) = (\log A)+(\log B);\quad \log\frac{A}{B} = \frac{\log A}{\log B}.$$

Descubrir tales errores es relativamente fácil; basta aplicarlo a situaciones concretas y sencillas. Por ejemplo:

$$\log(10\cdot 10) = \log 100 = 2 \neq (\log 10)\cdot(\log 10) = 1\cdot 1 = 1;$$

$$\log(10+10) = \log 20 \approx 0{,}301030 \neq (\log 10)+(\log 10) = 1+1 = 2;$$

$$\log\frac{100}{10} = \log 10 = 1 \neq \frac{\log 100}{\log 10} = \frac{2}{1} = 2$$

Pequeños retos

1. Expresa como un solo logaritmo las expresiones y da su valor si es resulta evidente:

a) log 50 + log 20 b) log 200 – log 20 c) log 200 + log 18– log 36

d) 2 · log 5 + log 4 e) log 400 – 2 · log 20 f) $\frac{1}{2}\cdot\log 1000 + \log\sqrt{10}$

2. Expresa como un solo logaritmo las expresiones:

a) $\log(2x-1)+\log(x+3)$ b) $\log(x+3)-\log(3x+1)$ c) $2\cdot\log x - \log 2x$

d) $\ln 3x - 3\ln x$ e) $3\cdot\log(x+2)+\log(x^2-1)$ f) $\frac{1}{2}\cdot\log(x^2+4)-2\log x$

Soluciones:

1. a) log 1000 = 3. b) log 10 = 1. c) log 100 = 2. d) log 100 = 2. e) log 1 = 0. f) log 100 = 2.

2. a) $\log((2x-1)\cdot(x+3))$. b) $\log\frac{x+3}{3x+1}$. c) $\log\frac{x^2}{2x} = \log\frac{x}{2}$. d) $\ln\frac{3x}{x^3} = \ln\frac{3}{x^2}$.

e) $\log\left[(x+2)^3\cdot(x^2-1)\right]$. f) $\log\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}$