

## LOGARITMOS

---

### ¿Qué es un logaritmo y cómo se calcula?

El logaritmo de un número  $x$ , en una base  $a$ , es otro número  $b$  al que hay que elevar la base para que dé  $x$ . Con símbolos matemáticos se define como sigue:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x; \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1; \quad x > 0.$$

- $\log_a x$  se lee *logaritmo en base a de x*, y significa que al número  $x$  se le asocia otro  $b$  que cumple que  $a^b = x$ . Se trata, pues, de una transformación relacionada con la potenciación de base  $a$ , en la que a cada número  $x$  se le asocia el exponente  $b$  preciso para que  $a^b = x$ .

### Ejemplo:

a) Si  $x = 1000$  y  $a = 10$ , el valor de  $b$  debe ser 3, ya que  $10^3 = 1000$ . Por tanto,  $\log_{10} 1000 = 3$ .

b) Si  $x = 32$  y  $a = 2$ , el valor de  $b$  tal que  $2^b = 32$  es 5, pues  $2^5 = 32$ . Por tanto,  $\log_2 32 = 5$ .

- Las bases usuales son  $a = 10$  y  $a = e$ , el número de Euler:  $e \approx 2,718281\dots$ . Los logaritmos en base 10 se llaman decimales; los de base  $e$  se llaman naturales o neperianos. Ambos se pueden hallar con la ayuda de una calculadora, con las teclas  $\boxed{\log}$  y  $\boxed{\ln}$ , respectivamente; y no es necesario especificar la base. Así,  $\log_{10} 2500 = \log 2500 = 3,397940$ , y  $\log_e 325 = \ln 325 = 5,783825$ .

### Ejemplos:

a) Aplicando la definición puede verse que:

$$\begin{array}{ll} \log_2 16 = 4, \text{ pues } 2^4 = 16 & \log_5 125 = 3, \text{ pues } 5^3 = 125 \\ \log_{10} 100 = 2, \text{ pues } 10^2 = 100 & \log 1 = 0, \text{ pues } 10^0 = 1 \\ \log 0,001 = \log 10^{-3} = -3 & \log 10^n = n, \text{ para todo } n \\ \ln e^4 = 4 & \ln e^n = n, \text{ para todo } n. \end{array}$$

b) Con calculadora:

$$\begin{array}{ll} \log 87 = 1,939519\dots & \ln 10 = 2,302585\dots \\ \log 0,00003 \approx -4,5229 & \ln 0,9 \approx -0,1054 \\ \log (-6) = \text{ERROR} & \ln 0 = \text{ERROR} \end{array}$$

### Observaciones:

1) Los logaritmos se inventaron (a principios del siglo XVII) para simplificar los cálculos matemáticos de multiplicación, división, potenciación y radicación, sobre todo cuando los resultados son números muy grandes y básicamente lo que importa es su orden de magnitud.

2) En base 10, el logaritmo de las sucesivas potencias de 10 es el exponente respectivo. Esto es:  $\log 1 = \log 10^0 = 0$ ;  $\log 10 = \log 10^1 = 1$ ;  $\log 100 = \log 10^2 = 2$ ;  $\log 1000 = \log 10^3 = 3$ ;  $\log 10000 = \log 10^4 = 4$ ; y, en general,  $\log 10^n = n$ .

3) En base 10, cuando un número multiplica su valor por 10, su logaritmo aumenta en una unidad. (Por ejemplo:  $\log 8,3 = 0,919078$ ;  $\log 83 = 1,919078$ ;  $\log 830 = 2,919078$ ; y así sucesivamente.) Y al revés, cuando el valor del logaritmo de dos números se diferencia en una unidad, uno de ellos es diez veces mayor que el otro.

4) En base 10, el valor del logaritmo de cualquier número comprendido entre  $10^p$  y  $10^{p+1}$  es un número comprendido entre  $p$  y  $p + 1$ . Así, por ejemplo, si  $\log A = 6,2$ , el valor de  $A$  está entre  $10^6$  y  $10^7$ ; luego el orden de magnitud de  $A$  es 6. Análogamente, si  $\log B = 12,48$ , el número  $B$  es de orden de magnitud 12. Y si  $\log C = -4,3$ , el número  $C$  es de orden de magnitud  $-5$ .

Otro ejemplo: El valor del logaritmo de cualquier número comprendido entre  $1000 = 10^3$  y  $10000 = 10^4$  será un número comprendido entre 3 y 4. Esto es, si  $10^3 < x < 10^4$ , entonces

$$\log_{10} 10^3 < \log_{10} x < \log_{10} 10^4 \Leftrightarrow 3 < \log_{10} x < 4.$$

5) El logaritmo de los números reales menores o iguales que 0 no está definido. Esto es,  $\log(-1000)$  carece de sentido. En estos casos, la calculadora da un mensaje de error.

### Antilogaritmo

Es la transformación inversa del logaritmo. Esto es, si logaritmo de  $A = b$ , entonces antilogaritmo de  $b = A$ . ( $\log A = b \Leftrightarrow \text{antilog } b = A$ )

En algunas las calculadoras se indica con las teclas  $\log^{-1}$  o  $\ln^{-1}$  y se halla pulsando sucesivamente las teclas SHIFT  $\boxed{\log}$  o SHIFT  $\boxed{\ln}$ , respectivamente.

### Ejemplos:

a) antilog 3 = 1000;    b) antilog 2,5 = 316,227766.    c) antiln 2 = 7,389056.

Los resultados anteriores se podrían haber dejado en forma de potencia, como sigue:

a) antilog 3 =  $10^3$     b) antilog 2,5 =  $10^{2,5}$     c) antiln 2 =  $e^2$ .

### Pequeños retos

1. Aplicando la definición de logaritmo (sin utilizar calculadora), halla el valor de:

a)  $\log_2 8$     b)  $\log_5 25^2$     c)  $\log_3 81$     d)  $\log_{10} 0,01$     e)  $\log_{10} 100000$     f)  $\ln e^{-2}$

2. Si utilizar calculadora halla el valor de los siguientes antilogaritmos en base 10:

a) antilog 1    b) antilog (-2)    c) antilog 6    d) antilog 0,5

3. Si utilizar calculadora halla el valor de los siguientes antilogaritmos neperianos:

a) antiln 1    b) antiln (-2)    c) antiln 3    d) antiln 0,5

### Soluciones:

1. a) 3. b) 4. c) 4. d) -2. e) 5. f) -2.

2. a) 10. b)  $10^{-2} = 0,01$ . c)  $10^6$ . d)  $10^{0,5} = \sqrt{10}$ .

3. a)  $e$ . b)  $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ . c)  $e^6$ . d)  $e^{0,5} = \sqrt{e}$ .