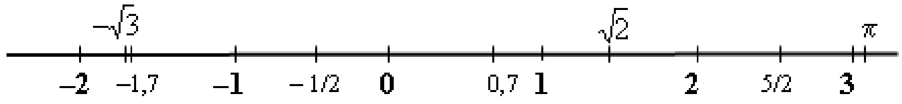
INTERVALOS

La recta real

Los números reales pueden representarse sobre una recta. Así:



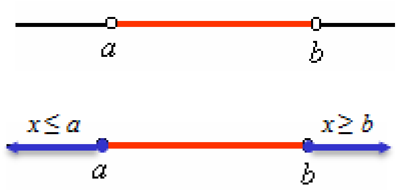
A cada punto de la recta le corresponde un número real; y al revés, a cada número real le corresponde un punto de la recta.

Intervalos

Los intervalos son subconjuntos de la recta real.

Intervalo abierto (a, b) = todos los números reales que son mayores que a y menores que b:

$$(a,\ b) = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x < b\}$$

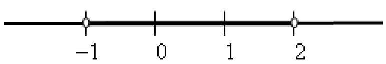


Decir que $x \in (a,\ b)$ es lo mismo que decir que $a < x < b$.

Decir que $x \notin (a,\ b)$ significa que $x \le a$ o $x \ge b$.

Ejemplo:

$(-1, 2) = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 2\}$.



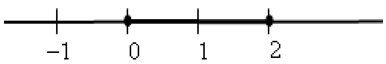
Intervalo cerrado $[a, b]$ = todos los números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b: $[a,\ b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a \le x \le b\}$.

Decir que $x \in [a,\ b]$ es lo mismo que decir que $a \le x \le b$.

Decir que $x \notin [a,\ b]$ significa que $x < a$ o $x > b$.

Ejemplo:

$[0, 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 2\}$.



- También puede definirse intervalos semiabiertos o semicerrados.

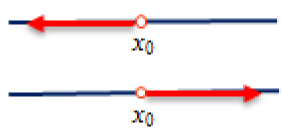
$(a,\ b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x \le b\}$ $\qquad$ $[a,\ b) = \{x \in \mathrm{R} \mid a \le x < b\}$

Semirrectas

Cualquier punto divide a la recta en dos semirrectas. Cada semirrecta puede considerarse como un intervalo. , en dos intervalos. Así, para cualquier número real x_0 se tienen las semirrectas: $x < x_0$ y $x > x_0$.

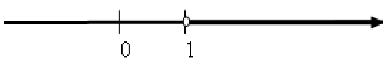
Los puntos de la semirrecta $x < x_0$ son los del intervalo $(-\infty,\ x_0)$.

Los puntos de la semirrecta $x > x_0$ son los del intervalo $(x_0,\ +\infty)$.

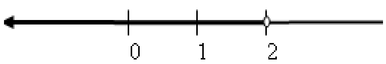


Ejemplos:

a) $(1, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 1\}$. Semirrecta a la derecha del 1.



b) $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 2\}$. Semirrecta a la izquierda del 2.



- Los intervalos pueden definirse también por medio del concepto de valor absoluto, $|x|$, cuya

definición es: $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Con esto, se tiene:

1) $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$.

Por tanto, decir que $|x| < k$ equivale a decir que $x \in (-k, k)$

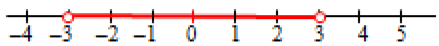
Igualmente, $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \Leftrightarrow x \in [-k, k]$

2) De manera análoga:

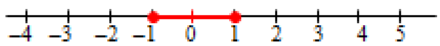
- $|x-a| < k \Leftrightarrow -k < x-a < k \Leftrightarrow a-k < x < a+k \Leftrightarrow x \in (a-k, a+k)$
- $|x-a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x-a \leq k \Leftrightarrow a-k \leq x \leq a+k \Leftrightarrow x \in [a-k, a+k]$

Ejemplos:

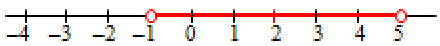
a) $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-3, 3)$.



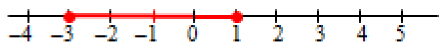
b) $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$.



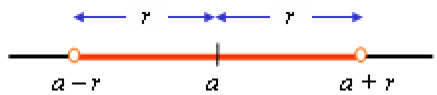
c) $|x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (-1, 5)$.



d) $|x+1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$.



<u>Observación:</u> Al conjunto de números reales *x* que cumple la desigualdad $|x-a| < r$ se le llama también <u>entorno de centro *a* y radio *r*</u>, y se denota por $E_r(a)$.



Así, $E_3(2) = (2-3, 2+3) = (-1, 5)$, es el entorno de centro 2 y radio 3. (Es el ejemplo c) anterior).

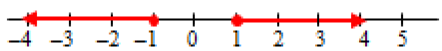
- Con el signo ≥ asociado al valor absoluto se pueden determinar otros tipos de subconjuntos de la recta real.

Así: $|x| > k$, con *k* positivo, determina dos intervalos: $x \geq k$ o $x \leq -k$.

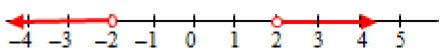
Mientras que $|x| \geq k$, con *k* positivo, determina los intervalos: $x < k$ o $x < -k$.

Ejemplos:

a) $|x| > 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ o $x \leq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.



b) $|x| \geq 2 \Leftrightarrow x > 2$ o $x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.



Pequeños retos

Escribe en forma de intervalo:

a) $|x| < 2$ b) $|x-1| < 1$ c) $|x+2| \leq 1$ d) $|x| > 3$ e) $E_1(3)$

Solución:

a) (–2, 2). b) (0, 2). c) [–3, –1]. d) (3, +∞). e) (2, 4).