INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Se considerarán sólo los tipos:

$|A(x)| < k$ y $|A(x)| \geq k$, con $k \geq 0$. (También con $\leq$ y $>$)

- La inecuación $|A(x)| < k \Leftrightarrow -k < A(x) < k$.

Su solución son los valores de x que cumplen a la vez las inecuaciones: $-k < A(x)$ y $A(x) < k$.

- La inecuación $|A(x)| \geq k \Leftrightarrow A(x) \leq -k$ o $A(x) \geq k$.

Su solución son los valores de x que cumplen alguna de las inecuaciones $A(x) \leq -k$ o $A(x) \geq k$.

Ejemplos:

a) $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$.

b) $|x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-2 \leq 1$. Esto es: $1 \leq x \leq 3$.

Para obtener ese resultado puede sumarse 2 a los tres miembros de las desigualdades:

$-1 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow -1+2 \leq x-2+2 \leq 1+2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$

c) $|2x-1| > 3 \Leftrightarrow 2x-1 < -3$ ó $2x-1 > 3 \Rightarrow 2x < -2$ ó $2x > 4 \Rightarrow x < -1$ ó $x > 2$.

d) $|x^2-3x| \geq 2 \Leftrightarrow x^2-3x \leq -2$ ó $x^2-3x \geq 2$.

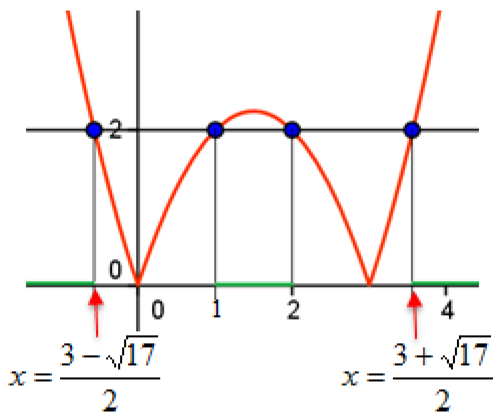
La primera: $x^2-3x \leq -2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \leq 0$, que se cumple si $x \in (1, 2)$.

La segunda: $x^2-3x \geq 2 \Leftrightarrow x^2-3x-2 \geq 0$, que se cumple si $x \leq \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ o si $x \geq \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

(Las soluciones de $x^2-3x+2=0$ son: $x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.)

En definitiva, su solución serán todos los valores de

$$x \in \left(-\infty,\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [1,\ 2] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2},\ +\infty\right).$$



<u>Interpretación geométrica</u>:

Como puede observarse, la gráfica del valor absoluto de $y = x^2 - 3x$ es mayor o igual que 2 cuando la x toma valores en los intervalos indicados: cuando sobrepasa la línea horizontal de altura 2, la recta $y = 2$.

Pequeños retos

Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|2x+1| \leq 5$ b) $|x^2-2| < 1$ c) $|x+1| > 3$

Solución:

a) $x \in [-3, 2]$. b) $x \in \left(-\sqrt{3},\ -1\right) \cup \left(1,\ \sqrt{3}\right)$. c) $x < -4$ o $x > 2$.